NIEKTORE

U W A G I

NA DYSSERTACYĄ

o

WOLNOSCI CZŁOWIEKA.

podleyſzey y nayniebeſpiecznieyſzey dla częſtych niezgod y Sedycyi. Treścią Stowarzyſzenia eſſencyonalną nazywa on: *gdy każdy z nas oddaie do ogólności oſobę ſwą y wſzyſtkę ſiłę ſwoię pod naywyżſzy Rząd y Dyrekcyą woli ogólney.* Ten woli rząd ogólney coż to ieſt, ieśli nie Demokracya? To *ciało moralne złożone*

w Paragrafie o Niewolniczym ſtanie.

1. Pomieſzał Autor w iedno dwie rzeczy rożne; właſność y Juryzdykcyą *Dominium proprietatis & Dominium Juriſdictionis.* Niewolnicy ſą właſnością ſwych ... dy podległe Królom

y niewolą y podległość rządom. A ieſzcze nie dowiodſzy, iż żaden nie może alienować ſwą wolność, oddaiąc ſię w niewolą, śmie wnosić, że żaden nie może poddać ſię pod rząd Królowi.

Zdanie zaś Grocyuſza, iż każdy człowiek w partykularności może wolność

GEOMETRYA
DLA
SZKOŁ NARODOWYCH.

CZĘSC II.

Cena oprawney w papier Zł. 1 i gr. 3 ſreb.

W DRUKARNI NADWORNEY J. K. Mci
ROKU 1781.

Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J. P. Lhuilier Obywatela Genewenſkiego, w Towarzyſtwo Nauk w tymże Mieście uſtanowione policzonego, ktòre za ogłoſzonym w Polſzcze, i obcych kraiach Uczonych do piſania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nadgrodę odebrało, od Towarzyſtwa do Kſiąg Elementarnych rozſtrząśnione, a przez J. X. Gawrońſkiego Kanonika Koadjutora Krakowſkiego Lektora, J.K.Mci i w tymże Towarzyſtwie zaſiadaiącego, na Polſki ięzyk z Francuſkiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepiſow naſzych podaiemy. w Warſzawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biſkup Wil. Prez.
MICHAŁ Xże PONIATOWSKI Biſkup Płoc.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliſki.
JĘDRZEY MOKRONOSKI Wwda Mazow.
JACEK MAŁACHOWSKI Podkan. Koron.
JOACHYM CHREPTOWICZ Podk. W. X. L.
MICHAŁ MNISZECH Marſzałek Nadw. L.
JGNACY POTOCKI Piſarz W. W. X. L.
ADAM XżęCZARTORYSKI Gen. Ziem. Pod.
STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI Gen. Lieut. W. K.
FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerſki.
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw. Or. Orła Biał.

ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY CZĘSCI GEOMETRYI.

(a2) RO-

ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych, użytych w tey Części Geometryi, z przydanemi o bok słowami Łacińskiemi, toż samo w używaniu Matematyków znaczącemi.

Biegon. *Polus*
Bryła. *Solidum.*
Bryłowatość. *Soliditas.*
Bytność. *Existentia.*
Ciągło. *Continuè.*
Ciągły. *Continuus.*
Czworokątny. *Quadrangularis.*
Czworościan. *Tetraëdrum.*
Dwòdzielny. *Subduplicatus*
Dwòmnożny. *Duplicatus.*
Dwòmnożyć. *Duplicare.*
Dwódziestościan. *Icosaëdrum.*
Dwónastościan. *Dodecàëdrum*
Graniastosłup. *Prisma*
Jednoimienny. *Ejusdem nominis*
Kąt płaski. *Angulus planus*
Kąt bryłowy. *Angulus solidus*
Kloc. *Truncus*

Krawędz

Krawędź. *Arrête* (po Francusku.)
Krzywy. *Curvus.*
Kula *Sphera.*
Kulisty. *Sphericus.*
Nadmiar. *Excessus.*
Ośmiościan, *Octoëdrum.*
Ostrosłup albo Ostrogran. *Pyramis.*
Ostrokrąg. *Conus*
Ostrokrąg ścięty. *Conus truncatus*
Płaszczyzna *Planum.*
Początkowy. *Elementaris.*
Pòłkole. *Semicirculus.*
Pòłkula. *Hemisphaerium.*
Przecięcie. *Sectio.*
Rodzenie się. *Generatio*
Ròwnik. *Æquator.*
Ròwnoległ bo z y. *Parallelegrammicus*
Równoległościan. *Parallelogrammum*
Rózległość. *Extensio*
Sciana. *Paries*
Spodek. *Pes*
Stały. *Constans*
Sześcian. *Hexàëdrum*
albo *Cubus*
Tròykątny. *Triangularis*
Tròymnożny. *Triplicatus*
Walec. *Cylinder*
Warsta. *Stratum*
Wielościan. *Polyedrum*
Wyczerpanie. *Exhaustio*
Wymiar. *Dimensio*
Wyrocznia. *Oraculum*

Prze-

Przestroga. Na Tablicy VI. Fig. 3. opuszczone są litery, p, q, które wpisać należy na końcach linii nayblizszey rò wnoodległey od linii PQ.

OMYŁKI DO POPRAWIENIA

Karta.	*Wiersz.*	*Stoi.*	*Popraw.*
18	3	(BD. (AC.	AC, BD.
27	-	*Fig.* 2.	*Fig.* 3.
57	19	be. -	bc.
59	20	Dost: -	Dostyczney
	22	Dost.	Dostawy
79	5	$1\frac{1}{3}$ -	- $3\frac{1}{3}$.
100	przedostatni wiersz cały zmazać.		
108	5	GE. -	GF.
-	7	GF. -	GH.
-	25	Równoległobokow	Równoległoboku.
120	24	z ich -	ich.
133	1	Które y -	którey.
155	17	abc -	aby
175	22	powierzchni	na powierzchni
188	7	ściętego -	całego.
197	12	pośrodka -	od środka
215	11	utworzony	utworzona
218	26	iaki -	iak i
225	6	C : b.	B : b.
236	5	do powierzchni	do powierzchni podstawy

CZĘSC



CZĘSC DRUGA

O Bryłach.

WSTĘP.

W Części pierwszey samemi tylko zatrudnialiśmy się liniiami i powierzchniami; lubo iakażkolwiek *rozległość* (extensio) będzie rzeczy iakiey, nie iest ona ani samą liniią, ani samą powierzchnią, ale się rozciąga wzdłuż, w szerz i wgłąb. I tak, pokòy naprzykład, ma swoię długość, ma szerekość, i wysokość, czyli grubość. Tarcica, choćby nayciensza, ma także długość, szerokość i grubość. Nie byłoby powierzchni, tey tarcicy, to iest: nie byłoby rozległości iey, uważaney co do długości tylko, i szerokości, gdyby nie było

A tarcicy

tarcicy uważaney co do wszystkich iey wymiarów. Powierzchnia ogranicza rozległość, i onę kończy; aby zaś granica iakiey rozległości była w samey rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powierzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak iak (mowiąc przez podobieństwo lubo dalekie) nie byłoby koloru naprzykład w suknie, gdyby nie było sukna.

Podobnym sposobem, lubo często nie uważaliśmy tylko długość iakiey rozległości (cośmy nazywali linią) niemasz iednak tey długości, ieżeli niemasz powierzchni, którą ona kończy, lub na którey może być w rzeczy samey ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powierzchni; a że nie będzie powierzchni, ieżeli nie będzie rozległości maiącey trzy wymiary, więc i linii nie będzie, tylko tam, gdzie iest rozległość, z trzema wymiarami.

Gdy się kto bawi około rozległości, ile ta trzy wymiary w sobie zamyka, w takim razie mowi się, iż się bawi około *Ciała* (Corpus) albo *Bryły* (Solidum.)

Geome-

Geometrya nie uważa inaczey Ciała, tylko ile to rozciągnione ieſt wzdłuż, wſzerz, i wzwyż albo w głąb: inne zaś własnościami iego całe ſię nie zatrudnia, zoſtawuiąc ie do uważania Fizykom. Lubo zaś zdaie ſię, iż ſobie ściśle nader w uważaniu ciała założyli granice Geometrowie, maią iednak obſzerne i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd ukrytych których wiadomość po większey części konieczna ieſt potrzebna chcącemu w Fizyce poſtąpić.

Nie ſami tylko Geometrowie, uważaiąc ciała, iednę ſobie w nich własność, to ieſt rozległość za cel wyſtawuią. Jeſt to, a przynaymniey być powinien, powſzechny poſtępowania ſpoſob, że gdy kto rzecz iaką z gruntu chce poznać, i poiąć; po części naypierwod iey własności uważa, a dopiero łączy ie razem, i dokładnieyſzey o rzeczy całey nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto ieſt ograniczony, aby wiele poſpołem nieznanych ieſzcze własności mogł dochodzić, a tym bardziey ie ogarnąć.

Skutek takowego własności rzeczy z oſobna dochodzenia, tym większey ieſt wagi, im więcey rzeczom taż włas-

ſność ſłużyć będzie: a taką własnością ieſt rozległość. Cokolwiek pod zmyſły naſze podpada i podpadać może, wszyſtko to ieſt rozległym; cokolwiek więc odkryie tym ſpoſobem Geometra, może to do wſzyſtkich rzeczy przyſtoſować, które tylko pod zmyſły naſze podpadaią, lub im poddane być mogą. A ztąd ſię okazuie ważność w wynalazkach Geometrycznych, i obfitość w przyſtoſowaniu onychże.

Lubo maiąc wzgląd na ſłabość poięcia ludzkiego, iednę tylko własność ciała uważa Geometra, dla większey iednak wygody i tę ieſzcze dzieli nieiako na części, i w myśli ie oſobno ſtawia, chociaż w rzeczy ſamey oſobno ſię nie znayduią. Nie ma względu rolnik na grubość ziemi w tym mieyſcu, gdzie rolą ſwoię uprawia. Dosyć mu na tym, że ta grubość ieſt doſtateczna do przyięcia ziarna, do doſtarczania ſoku i do rozwinienia ſię tegoż ziarna. Wielkość pola znać oſobliwiey ſtara ſię, aby wiedział, ile na nim ziarna poſiać może, a zatym powierzchnią ſwego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i piſzący, miarkuie wielkość powierzchni papieru, końcem zmieſzczenia na nim tego,

co

co ma pisać: nie wchodząc w iego grubość, i dosyć maiąc na tym, że mu atramentu nie przebiia.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego, wszelako iednak, ciało to, dwie strony odmienne, przeciwne sobie mieć musi, i iedna z nich odłączyć się w rzeczy samey może od drugiey. luboby nie znalazło się sposobne narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc chociaż naycieńsze, nie może być za iedno brane, co powierzchnia; a zatym nie prawdziwie rzecz wykładaią niektórzy Geometrowie. gdy mowią: że ciało albo bryła składa się z powierzchni położonych iednych na drugich; bo iakażkolwiek byłaby liczba tych warst, z których ciało złożone uważamy, każda iednak wszczególności ta warsta byłaby bryłą, a nie powierzchnią, ponieważ miałaby dwie strony przeciwne, i mogące się od siebie odłączyć.

Co się zaś powiedziało o powierzchniach, to i o liniiach, twierdzić należy; że nie dla tego są od Geometrów uważane, iakoby w rzeczy samey znaydowały się, ale tylko dla łatwości i wygody.

dy. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak szeroka iest droga, którą ma przeyść, dosyć mu na tym, iż się nią udać może. Liczba kroków, które ma czynić nie zawisła od szerokości, ale od samey długości tey drogi; tę przeto długość szczególniey uważa.

Niechby była bardzo mała szerokość powierzchni iakiey, naprzykład Równoległoboku, i niechby ta sama tak mała szerokość podzielona była na iak naywięcey części, przez linije równoodległe od długości, wszelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak naymnieysza była odległość dwóch liniy, które tę szczupłą powierzchnią kończą, za iednę iednak linią wziąć ich nie można; a ztąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie iest niedokładne a bardziey ieszcze fałszywe; że powierzchnia składa się z liniy położonych iednych przy drugich.

Nakoniec zdarzaią się przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całey linii, ale końce iey tylko iedną, lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi się, że Geometra samym się za-

tru-



ſtadnia *punktem.* Punktu w ſamey iſtocie niemaſz, ieżeli niemaſz linii, którą punkt kończy, albo iey części, które oddziela. Podróżny cel ſwoiey drogi, iak punkt iaki ſobie wyſtawia, wielkości iego całe ſię nie zaprzątaiąc, aż póki do niego nie doydzie, doſzedłſzy, uważa dopiero obſzerność mieyſca, do którego dążył. Niemaſz wierzchołka kąta, ieżeli nie będzie dwóch liniy ten kąt czyniących. Uwagi nad któremi ſię zaſtanawia Geometra czyli to, co do położenia punktów iednych względem drugich, czyli względem linii iakiey, pochodzą z ſamego wyſtawienia ſobie w myśli tych rzeczy w iſtocie ſię nie znayduiących, dla łatwieyſzego doyścia tego, czego ſzuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względem zmyſłów naſzych, lub względem wielkości ciał, które nam nayczęściey pod zmyſły podpadaią: wſzelako można oddalić myślą tę małość względem innych większych rzeczy, i uważać ciało choćby też naymnieyſze, iak gdyby wielkim bardzo było, a to względem tyſiączney naprzykład części ſwoiey.

Niech będzie iak naymnieyſza linia, tey linii koniec ieden, zawſze różnić ſię

bę-

będzie od drugiego. J znowu niechby kto na iak nay więcey części podzielił iaką linią, każda z tych części dwa końce odmienne mieć będzie, a ztąd poznać można, iak nie prawdziwe iest to wyrażenie; że linia składa się z punktów przy sobie położonych.

Wystawuiąc sobie Geometra pod temi różnemi postaciami rozległość, uprzedzać tym samym zdaie się te trudności, które często zwykły bywać zarzucane o prawdziwey *bytności* (existentia) tych rzeczy, które są celem iego nauki.

Powierzchnia płaska, iest powierzchnią, na którey ku wszystkim stronom linie proste prowadzić można: i takiemi to liniiami i powierzchniami dotąd zatrudnialiśmy się, których wszystkie części na teyże samey *Płaszczyznie* zostaią (in eodem Plano). W części następuiącey takie nadto linie i powierzchnie zabawić nas będą, które na odmiennych płaszczyznach znayduią się.

Z dwoiakiemi liniiami mieliśmy ieszcze do czynienia, z prostemi i z kołowemi, lub ich częściami. Powierzchnie także, około których bawiliśmy się,

były

były albo zakończone liniiami proftemi. albo linią kołową, albo liniiami pròftemi, i częściami liniy kołowych. W części następuiącey będziemy nadto zabawiać się różnemi powierzchniami *krzywemi* (curva) które wyftawić fobie można iak gdyby początek miały z obrotu powierzchni płafkich, które iużeśmy roftrząfali. Obaczemy to w fzczegulności, gdy o każdey takiey powierzchni mowa będzie.

Co się zaś tycze *Bryl*; te dwoiakiego gatunku zabawiać nas będą; iedne, które są zakończone powierzchniami płafkiemi, drugie, które się kończą powierzchniami krzywemi albo częścią krzywemi, częścią płafkiemi.

Geometrya więc, ieft to nauka, która się zabawia famą rozległością.

Liniie profte dwoiakośmy uważali, raz co do ich wielkości, drugi raz co do ich położenia iednych względem drugich. W pierwfzym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo profto zaraz, albo przez fpolną im miarę, do którey ftofowaliśmy każdą z ofobna liniią. W drugim względzie, albo liniie

z fobą

z ſobą ſię ſpotykały, i ztąd początek kątów, i ich podziałów; albo ſię też nie ſpotykały.

Nauczyliśmy ſię dawać linii iedney względem drugiey iakiekolwiek do iwpodobania położenie: to ieſt robić kąt iakikolwiek dany, lub pociągnąć równoodległą od linii daney. Wyznaczyliśmy mieyſce wierzchołków, kątów iakichkolwiek danych, których ramiona przechodzą przez dwa punkta dane, i wiele ztąd użytecznych używań wywodliśmy. Nie mogąc zaś dokładnie wyznaczyć ſtoſunku okręgu koła do linii proſtey, przybliżyliśmy iak naybardziey ſtoſunek ten do prawdziwego. Widzieliśmy oraz, że porównanie okręgów iednych do drugich, nie zawiſło od porównania okręgu z liniią.

Co do powierzchni; przytoczyliśmy nayprzód przypadki, w których dwie figury mogą przyſtać do ſiebie. Widzieliśmy, że to przyſtawanie zawiſło iedynie od wielkości i położenia liniy iednych względem drugich, to ieſt, że tylko takie dwie figury przyſtać mogą do ſiebie, w których boki iednakowey ſą wielkości iedne względem drugich, i

iedna-

iednakowego położenia. Jednym z nayznamienitſzych przyſtoſowań było przemienienie, czyli przeryſowanie iakieykolwiek figury proſtokreślney. Widzieliśmy także, iż wielkość figur proſtokreślnych nie zawiſła od wielkości i położenia ich boków, gdyż Troykąty, lub Równoległoboki, byleby iednakowe miały podſtawy, i wyſokości, ſą równe; równe też będą, tak dwa na przykład Troykąty, ako i dwa Równoległoboki, gdy ich podſtawy będą w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości; Nadto równość w wielkości figur nie tylko nie zawiſła od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby; ponieważ Tróykąt, Równoległobok, i kwadrat może być tak zrobiony, że ſię równać będzie iakieykolwiek figurze daney proſtokreślney; może ieſzcze zrównany być z ſummą lub różnicą figur innych proſtokreślnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą iaką proſtokreślną, i zryſować takie koło, któreby mało co różniło ſię od iedney lub więcey figur proſtokreślnych; dokładnie zaś można mieć koło równe innemu danemu, lub wielu innym kołom także danym.

Lubo wielkość figury nie ieſt tym ſamym wyznaczona, że wyznaczony ieſt iey obwód i położenie boków; podany iednak mieliśmy ſpoſób ieden z nayzwyczaynieyſzych, wykryślenia figury proſtokreślney o ilukolwiek bokach danych, maiąc dany iey obwód, widzieliśmy oraz granice, w których przy nie powiękſzonym obwodzie, powierzchnia figury być może powiękſzona; lubo zmnieyſzenia iey niema żadnych granic.

Z podobieńſtwa położenia liniy, które kończą figurę, i z proporcyonalności tychże liniy wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wnioſków, i przyſtoſowań. Szczególniey zaś wynikało, przenieſienie na papier, działań na ziemi częſtokroć nierówney odprawionych; które to przenieſienie dokładnieyſzym i łatwieyſzym ieſzcze ſtawało ſię, używſzy rachunku.

W tym wſzyſtkim, co ſię dotąd mówiło, nie wſpominało ſię tylko o linii proſtey, i o linii kołowey, o powierzchniach płaſkich zakończonych przez liniie proſte, albo przez liniie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaſkiemi, albo krzy-

wemi

wemi, maiącemi fwoy początek od powierzchni płaskich. Ta część Geometryi, nazywa fię *Geometryą początkową* (Geometria Elementaris) flużyv ona za fundament koniecznie potrzebny do innych części zawilfzych, z których fię fkłada *Geometrya wyżfza*; (Geometria fublimis), a w tey rzecz ieft o rozmaitych innych liniiach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czasem można, a czasem nie można wyprowadzić z tych oftatnich liniy krzywych, lub z powierzchni niemi zakończonych.

Różni fię też Geometrya początkowa od wyżfzey, i co do fpofobu ryfowania figur do niey należących; w Geometryi albowiem początkowey, dosyć ieft na cerklu i linii do wykreślenia figur iey właśnych; każde przeto zagadnienie, które z pomocą tych dwóch tylko narzędziów może być rozwiązane, do niey należy. Jeżeli zaś zagadnienie, mogąc być rozwiązanym, z pomocą famey linii i cerkla, to ieft przez fame linije i łuki koła, rozwiązuie fię z użyciem innych ieszcze narzędziów, albo liniy krzywych, odmiennych od koła, o tako-

takowym rozwiązaniu mówić ſię zwykło, iż nie ieſt wykonane ſpoſobem zadoſyć czyniącym.

ROZDZIAŁ I.

O położeniu tak Liniy iako i Płaszczyzn iednych względem drugich.

1. *Twierdz:* 1. Gdy liniia ma dwa ſwoie punkta, na iedney płaſzczyznie, ma ie oraz i wſzyſtkie na teyże płaſzczyznie.

Dowodz: Liniia proſta wyznacza ſię przez dwa punkta: a zatym liniia proſta poprowadzona przez dwa punkta dane, na daney także płaſzczyznie znaydzie ſię z każdą inną proſtą, przez też dwa punkta poprowadzoną, i iedną z nią liniią uczyni.

2. *Twierdz.* Przez liniią proſtą i punkt gdziekolwiek dany, może zawſze przechodzić iedna płaſzczyzna.

Dowodz Wyſtawmy ſobie myślą, iż przez tę liniią przechodzi iakakolwiek płaſzczyzna; niechay ta płaſzczyzna obraca

braca ſię około teyże linii, w tym obrocie przeydzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą ſamą płaſzczyzną, którey ſzukamy.

Można także i przez dwie liniie przecinaiące ſię (a) przeprowadzić płaſzczyznę; ponieważ płaſzczyzna przechodząca przez iednę z tych liniy i przez ktòrykolwiek punkt drugiey, przechodzi razem i przez przecięcie tych dwóch liniy, i przez punkt należący do drugiey linii, a zatym i druga ta liniia cała ieſt na teyże płaſzczyznie.

Można nakoniec i przez trzy boki Tróykąta przeprowadzić płaſzczyznę. Jakoż płaſzczyzna przechodząca przez dwa boki Tróykąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecia

(a) *Y dwie. przecinaiące ſię, bo wiele ieſt liniy, których położenie ieſt takie, że przez nie nie może razem przechodzić iedna płaſzczyzna; na przykład w koſtce ſześcienney. tak ieſt położone ramię iednego kąta, na iedney ſtronie, i bok przeciwny drugiemu ramieniu tegoż kąta, na inney ſtronie, że przez te dwie linie, iedna płaszczyzna przechodzić nie może.*

cina tamte dwa, a zatym i ten trzeci bok na teyże iest płaszczyznie.

3. *Twierdz.* 3. Gdy się dwie płaszczyzny przecinaią, tym spólnym ich przecięciem, iest liniia prosta.

Dowodz. Weźmy na tym spólnym przecięciu dwa iakiekolwiek punkta, i poprowadźmy przez nie, na iedney z dwóch płaszczyznie, liniią prostą; ta liniia będzie miała na drugiey płaszczyznie dwa punkta do siebie należące, więc i cała będzie na teyże drugiey płaszczyznie; a zatym będzie cała na obydwóch płaszczyznach, to iest będzie spolnym ich przecięciem.

To co się o płaszczyznach powiedziało, można porównać z tym, co się linii tycze; to iest: liniia prosta wyznacza się przez dwa punkta, płaszczyzna wyznacza się przez trzy punkta lub przez dwie liniie przecinaiące się. Gdy znowu dwie liniie wzaiem się przecinaią, punkt spólnym ich iest przecięciem; gdy zaś przecinaią się dwie płaszczyzny, spolnym ich przecieciem iest liniia prosta.

4. *Twierdz.* 4. Gdy liniia prosta do dwóch innych, które się przecinaią na

iedney

iedney płaſzczyznie, proſtopadłą ieſt w punkcie ich przecięcia, bedzie też proſtopadłą i do każdey inney linii, przechodzącey przez ten punkt na teyże płaſzczyznie.

Można to nayprzod obiaśnić na karcie przełamaney. Liniia proſta, podług ktorey karta ſię przełamała, proſtopadłą ieſt do bokow, części dwoch, tey karty przełamaney. Obracaiąc część iednę złamaną, około złamania, czyli ſpólnego przecięcia, bok ieden z dwóch, do którego liniia przecięcia była proſtopadłą, odmieniać będzie położenie, wſzelako iednak, na iedney zoſtanie płaszczyznie, i liniia przecięcia zawſze do niego będzie proſtopadłą. Ten przykład prawdę tę zmysłom dosyć ukazuie, nie dosyć iednak ukazuie ią rozumowi.

Dowodz. Niech będą dwie liniie proſte, AB, CD, przecinaiące ſię w P, i niech do obydwóch proſtopadłą będzie liniia SP. Na płaſzczyznie przechodzącey przez te dwie liniie, przeciągnąwſzy przez punkt P. iakązkolwiek liniią EF, do tey linii będzie też proſtopadłą liniia SP. *Tab. I. Fig. 1.*

Weźmy liniie równ : PA, PB, i znowu PC, PD, także równe. Poprowadźmy BD ſpotykaiące liniią EF, w punktach AC, E, i F.

Poniewaz Tróykąty: APC, BPD, maią dwa boki równe iedne względem drugich, i kąty między temi bokami zawarte, także równe, więc mogą przyſtać do ſiebie; a w ſzczegulności kąt PAC, równy ieſt kątowi PBD. Przeto i Tróykąty APE, BPF iako maiące równe boki: PA, PB, i kąty równe iedne względem drugich, mogą też do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności, równe ſą w nich boki PE, PF, i AE, BF.

Pociągniymy ieſzcze linie SA, SB, SC, SD; Tróykąty proſtokątne SPA, SPB, maią bok ſpolny SP, i boki PA, PB, równe: a zatym mogą do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności liniie SA, SB, ſą równe. Podobnie równe ſą i liniie SC, SD. Dwa więc Tróykąty CSA, BSD, których boki wſzyſtkie równe ſą iedne względem drugich, mogą do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności kąty SAC, SBD ſą równe.

Poprowadziwſzy SE, SF; Tróykąty: SAE, SBF maią boki SA, AE, równe

wzglę-

względem boków SB, BF, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać; a wszczególności równe są linie, SE, SF.

Więc w Tróykątach SPE, SPF, równe są boki w iednym, względem boków drugiego, a zatym i te przystać mogą do siebie; a wszczególności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległemi, czynią razem dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątem prostym; a zatym liniia SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To Twiedzenie bardziey w dowodzeniu długie niż trudne, powinno być obiaśnionym przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna, i z nici; lub w inny sposób. Toż rozumieć trzeba i względem wszystkich prawie podań, w tey części zawartych.

5. *Defin:* Gdy liniia prostopadłą iest do wszystkich innych, które się w punkcie iey spadku przecinaią na płaszczyznie iakiey, o takiey linii mówi się, że iest prostopadłą do tey płaszczyzny: a zatym ieżeli liniia prostopadłą iest do [illegible]

dwóch innych w punkcie ich przecięcia, na płaszczyznie, ta liniia prostopadłą iest i do tey płaszcyzny.

6. *Twierdz:* 5. *Wzaiemnie,* ieżeli liniia, prostopadłą iest do trzech innych liniy, które się w iednym iey puncie przecinaią; płaszczyzna ta, która przechodzi przez dwie z tych trzech linii przechodzi też i przez trzecią.

Tab. I. Fig. 1, Niech będzie liniia SP. prostopadłą do linii PB, PD, PF, które przechodzą przez tenże sam punkt P, linii SP.

Niechay płaszczyzna iaka przechodzi przez liniią SP, i PF. Jakażkolwiek będzie liniia, w którey ta płaszczyzna, przecina drugą płaszczyznę przechodzącą przez liniie PB, i PD, wszelako liniia SP będzie prostopadłą do tego spolnego przecięcia, a zatym gdyby liniia PF, nie była tym spólnym przecięciem, tedy liniia SP, byłaby prostopadłą do dwóch linii leżących na teyże co i ona płaszczyznie, to iest: byłaby prostopadłą do linii PF, i do drugiey iesczcze linii różney od PF przecinaiącey spolnie dwie płaszczyzny; co być nie może. Liniia więc PF. nie iest różna od spolnego przecięcia dwòch płaszczyzn SPF, BPD, a zatym iest tym spol-



ſpolnym przecięciem, i przeto należy i do drugiey płaſzczyzny BPD; to ieſt ta płaſzczyzna BPD przechodząca przez liniie PB, PD, przechodzi też i przez liniią PF.

7. *Twierdz*: 6. Dwie liniie proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, ſą od ſiebie równoodległe. *Tab. I.*

Niech będą dwie liniie BA, CD proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, na którą ſpadaią w punktach B, i C, te dwie liniie ſo równoodległe. *Fig. 2.*

Poprowadzmy liniią BC, a od końca C ſpolnego linii BC, z liniią DC, proſtopadłą do płaſzczyzny, wyciągniymy na tey płaſzczyznie proſtopadłą CE, do BC, równą iakieykolwiek długości BA, wziętey na drugiey linii proſtopadłey do teyże płaſzczyzny. Poprowadźmy ieſzcze i liniie BE, AE. Dwa Tróykąty ABC, ECB, maią ſpólny bok BC, boki także BA, CE, równe, z wykryślenia, i kąty proſte: ABC, BCE; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności liniie BE, AC, ſą równe. Dwa tedy Tróykąty ABE, ECA maią względem ſiebie równe wſzyſtkie boki,

aza-

a zatym przyftać mogą do fiebie; a wfzczególności równe fą kąty ABE, ACE; że zaś liniia AB, proftopadłą ieft do linii BE, (ponieważ wzieliśmy ią za proftopadłą do płafzczyzny przechodzącey przez liniie BC, BE) więc kąt ACE, ieft też profty; a zatym liniia EC proftopadła do dwóch liniy CB, CD; z wykryślenia, ieft też proftopadłą i do linii CA. Przeto ta liniia CA ieft na tey famey płafzczyźnie, co i liniie BC, CD. A że płafzczyzna przechodząca przez liniie AC, CB, przechodzi też i przez liniią AB, więc liniie AB, CD, fą na iedney płafzczyznie; będąc zaś na iedney płafzczyznie, że fą proftopadłemi do linii BC, więc od fiebie równoodległemi będą.

Przeftroga Aby łatwiey zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przegiąć Figurę 4, w linii BC; tak, aby część iedna (ABCD) tey Figury, przypadała profto nad drugą częścią BEC. Podóbnie dopomagać można łatwieyfzemu wyobrażeniu i w innych Figurach, gdzie nie iedna zachodzi płafzczyzna.

Uwaga. W pierwfzey części cokolwiek fię mówiło o liniiach równoodległych; zawfze to było w tym rozumieniu, że te liniie kreślone były, na tey

famey

ſamey płaſzczyznie, na ktòrey i każda inna linia łącząca dwa ich punkta, leżała.

8, *Twierdz:* 7. Jeżeli dwie liniie ſą od ſiebie rownoodległemi, a iedna z nich proſtopadłą ieſt do iakiey płaſzczyzny, będzie i druga do teyże płaſzczyzny proſtopadłą.

Weźmy dwie liniie BA, CD za rownoodległe; ieżeli iedna z nich nap: CD, ieſt proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, będzie do teyże płaſzyzny proſtopadłą i druga BA. *Tab. I. Fig. 2*

Na płaſzczyznie, do ktòrey wzieliśmy za proſtopadłą, CD, pociągniymy CB; będą do CB, proſtopadłemi obiedwie liniie AB, i CD. Na teyże płaſzczyznie niech będzie CE proſtopadłą do BC, i rowną długości BA. Poprowadźmy ieſzcze AC, AE, BE. Całe dowodzenie na tym zawiſło, aby okazać, że kąt ABE ieſt proſtym, to ieſt, że linia AB proſtopadła do linii BC, ieſt razem proſtopadłą i do linii BE, leżącey na tey ſamey płaſzczyznie, do ktorey liniia CD ieſt proſtopadłą.

Dwa Tróykąty proſtokątne ABC, ECB. maią ramiona kąta proſtego rowne iedne

dne względem drugich ; a zatym te dwa Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczególności liniie AC, BE, ſą równe. Maią tedy dwa Tróykąty ABE, ECA, wſzyſtkie trzy boki równe iedne względem drugich, i mogą zatym przyſtać do ſiebie; a wſzczególności równe ſą kąty ABE, ACE, Płaſzczyzna przechodząca przez dwie liniie równoodległe AB, CD, przechodzi też tak przez liniią BC, iako i przez AC, więc liniie DC, BC, AC, na iedney płaſzczyznie leżą. A że liniia CE ieſt proſtopadłą do dwóch linii CD, BC; będzie też proſtopadłą i do trzeciey linii CA ; a zatym kąt ACE ieſt proſtym ; a że ten kąt, ieſt równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, ieſt proſtym.

Tab. I. 9. *Zagad:* Spuścić proſtopadłą do płaſcczyzny, z punktu nie na niey danego.

Fig. 3. Niech będzie taki punkt S, z którego ſpuścić trzeba proſtopadłą na daną płaſzczyznę.

Rozwiązanie. Na płaſzczyznie daney nakreślmy iakąkolwiek liniią AB. Niech przez tę liniią i przez punkt dany S, przechodzi inna płaſzyzna, na którey pociągniy-

ciągniymy SD, prostopadłą do AB. Na daney płaszczyznie niech też będzie poprowadzona DP, prostopadła do AB; a przez liniie SD, DP, niech przechodzi płaszczyzna, na którey niech będzie SP prostopadłą do linii DP; ta liniia SP będzie razem prostopadłą, którey szukaliśmy.

Wykreślenie służące do dowodzenia. Niech przez P, przechodzi liniia EF, równoodległa od AB.

Dowodz: Liniie SD, PD, z wykreślenia są prostopadłe do linii AB; więc liniia DB, wzaiemnie iest do obydwóch tych liniy prostopadłą; a zatym prostopadłą iest i do płaszczyzny przechodzącey, przez te dwie liniie. Aże liniia EF równoodległą iest od linii AB, więc liniia EF iest też prostopadłą do teyże płaszczyzny SDP; a wszczegulności prostopadłą iest do linii SP; i liniia SP, iest wzaiemnie do linii EF prostopadłą. Ze zaś liniia SP zrobiona była prostopadłą do linii PD, więc liniia SP iest razem prostopadłą do linii EF, i PD, które się przy iey spadku P, przecinaią na daney płaszczyznie, a zatym liniia SP, prostopadłą iest do teyże płaszczyzny.

10.

10. *Zagadn:* 2. Od punktu danego na płaſzczyznie wynieść proſtopadłą do teyże płaſzczyzny.

Rozwiąz: Spuśćmy do płaſzczyzny daney z punktu iakiegokolwiek nie na niey będącego, proſtopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoodległą od teyże proſtopadłey.

11, *Uwaga* 1. Od punktu danego, iedne tylko prowadzić można proſtopadłą, do płaſzczyzny.

12. *Uwaga.* 2. Gdy liniia iaka nie ieſt ani na ſamey płaſzczyznie, ani do niey proſtopadłą; może być albo od niey równoodległą, albo tak, iak zechcemy do niey nachyloną.

Nayprzod Jeżeli, ſpuściwſzy z dwóch punktów linii iakiey, dwie proſtopadłe na płaſzczyznę, te proſtopadłe będą ſobie równe; tedy ta liniia od którey ſą ſpuſzczone, będzie równoodległa od płaſzczyzny, na którą ie ſpuściliśmy, to ieſt: nie ſpotka nigdzie tey płaſzczyzny, choćby tak liniia, iako i płaſzczyzna naydaley były przedłużone.

Powtore

Powtore. Niech będzie liniia SD. nie prostopadłą do płaszczyzny; ale niech spotyka płaszczyznę w punkcie naprz: D. Z punktu którego kolwiek tey linii naprz: z S, spuśćmy do tey płaszczyzny prostopadłą natrafiaiącą na nię w punkcie P, i poprowadźmy PD. Kąt SDP. nazywa się kątem *pochyłości* (angulus inclinationis) tey liniy SD, do płaszczyzny. Tab. I. Fig. 2.

Ten kąt iest naymnieyszym z tych wszystkich, które czynić może liniia SD, z akąkolwiek inną linią poprowadzoną na tey płaszczyznie, przez punkt D, i gdyby z punktu P. iako ze środka promieniem równym linii PD, nakryślony był okrąg koła, wszystkie linie ciągnione od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniłyby iednakowy zawsze kąt z tą płaszczyzną.

Ponieważ te podania są tylko do innych głownieyszych *pomocnicze* (subsidiariæ) i łatwe do dowiedzenia, przestaie się tu na samym ich wyrażeniu.

13. *Twierdz:* 8. Gdy dwie liniie równoodległe są od trzeciey, która na odmienney od nich leży płaszczyznie; te

dwie

dwie liniie i od siebie równoodległe będą.

Tab: I. Fig: 4. Niech będą dwie liniie AB, CD, równoodległe od linii EF, będą te dwie liniie i od siebie równoodległemi. Od punktu któregokolwiek na linii EF, naprz: G, wyciągniymy dwie do tey linii prostopadłe: GH. GI, na płaszczyznach przechodzących przez tęż liniią EF, i przez AB, i CD. Ponieważ liniia EF, iest prostopadłą, tak do lini GH, iako i do linii GI, więc też będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey przez te dwie liniie. A że znowu dwie liniie AB, CB są równoodległe od linii EF, więc są obiedwie prostopadłe do płaszczyzny przechodzącey przez liniie GH, GI, a zatym są od siebie równoodlęgłe.

14. *Twierdz:* 9. Gdy dwie liniie, które się przecinaią są równoodległe względem dwóch drugich, które się także przecinaią, kat zawarty między dwiema pierwszemi liniami, równy będzie kątowi zawartemu między dwiema drugiemi.

Tab: I. Fig: 5. Niech będą dwie liniie AB, AC, równoodległe względem dwóch drugich DE,

DE, DF; kąt BAC zawarty między dwiema pierwſzemi, równy ieſt kątowi EDF zawartemu między dwiema drugiemi.

Weźmy równe liniie AB, DE, i równe także liniie AC, DF. Pociągniymy liniie AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ linie AB, ED, ſą równe, i równoodległe, Czworokąt ABED będzie oraz Równoległobokiem, i liniie też AD, BE, bądą równemi, i równoodległemi.

Podobnie równe ſą i równoodległe liniie AD, CF; więc liniie BE, CF ſą też równe, i rownoodległe. względem linii AD; a zatym równe ſą ſobie, i od ſiebie równoodległe. Jeſt tedy Czworokąt BEFC, oraz Równoległobokiem, a w ſzczegulności równe ſą liniie BC, EF. Przeto Tróykąty BAC, EDF, boki trzy równe maią, iedne względem drugich, a zatym przystać mogą do ſiebie, a w ſzczegulności równe ſą kąty BAC, EDF.

15. *Przyſtoſowanie.* Niech będą dwie płaſzczyzny, które ſię przecinaią. Na każdey z tych płaſzczyznie wyſtawmy proſtopadłą, do ſpolnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu któregokolwiek

wiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiema temi prostopadłemi, iednakowy zawsze będzie, chociaż coraz inny na spolnym przecięciu punkt wybierać będziemy, do wyprowadzenia z niego tych prostopadłych.

Defin: Jest przeto taki kąt zdatnym do wymierzenia pochyłości tych dwóch płaszczyzn iedney względem drugiey. Gdy zatym kąt zawarty między temi dwiema prostopadłemi, iest prosty, mówi się, że w takim razie *płaszczyzna iedna iest prostopadłą do drugiey.* Gdyby zaś kąt między temi dwiema prostopadłemi zawarty, miał: 10°, 20°, 30° i t. d. w tym razie i dwie płaszyzny zawierałyby kąty: 10°, 20° 30°, it. d.

Można ieszcze i w inny sposob, przeświadczyć się iako pochyłość dwóch prostpadłych, wyciągnionych na dwóch płaszczyznach, od iednego punktu linii przecięcia spolnego tych płaszczyzn, odpowiada zawsze pochyłości tychże dwóch płaszczyn. Wystawmy albowiem sobie te dwie płaszczyzny przystaiące do siebie, i leżące iedna na drugiey. Niech potym spodnia płaszczyzna zostanie na swoim mieyscu, a wy-

a wyższa niech się podnosi, i obraca około spólnego przecięcia. Spolne przecięcie, podczas tego obrotu będzie zawsze prostopadłe do dwóch linij prostopadłych wyciąganionych na obydwóch płaszczyznach, od iednego punktu; a zatym te dwie prostopadłe zostaiące zawsze każda na swoiey płaszczyznie, odpowiadać będą podczas tego obrotu, pochyłości dwóch płaszczyzn. Gdy zapiz: płaszczyzna ruchoma, obieży połowę drogi, którą iey obeyść trzeba, aby się znalazła na drugiey stronie, w równi z płaszczyzną ruchom, w ten czas i prostopadła do społnego przecięcia, znayduiąca się na płaszczyznie ruchomey obieży połowę tey drogi, którą ma obeyść, aby się w iedney równi stykała końcem swoim z drugą liniią prostopadłą, do społnego przecięcia wyciągnioną na płaszczyznie nieruchomey. Toż mówić i o innych częściach tego obrotu.

16. *Twierdz:* 10. Gdy iaka prosta liniia prostopadłą iest do płaszczyzny, do teyże płaszczyzny prostopadłą będzie każda inna płaszczyzna przez tę liniią przechodząca.

Niech

Tab: I. Fig: 6. Niech będzie liniia GP, prostopadłą do iakiey płaszczyzny, i niech przez tę liniią GP, przechodzi inna iakakolwiek płaszczyzna; ta prostopadłą będzie do pierwszey płaszczyzny.

Niech liniia AB, będzie spolnym tych dwóch płaszczyzn przecięciem; od punktu P, przez pierwszą płaszczyznę wyciągniymy PC, prostopadłą do tego spolnego przecięcia.

Ponieważ liniią GP, wzieliśmy za prostopadłą do pierwszey płaszczyzny, więc GP prostopadłą będzie tak do linii, AB, iako i do linii PC; bo te dwie liniie przechodzą przez pierwszą płaszczyznę; a zatym od punktu któregokolwiek nap: P, znayduiącego się na spolnym przecięciu dwóch tych płaszczyzn, wyciągnowszy, prostopadłe PG, PC, do tegoż spolnego przecięcia, te liniie będą prostopadłe iedna do drugiey; a ztąd prostopadłe będą do siebie i te dwie płaszczyzny.

17. *Wniosek.* Gdy liniia iaka prostopadła iest do płaszczyzny, a na teyże płaszczyznie pociągniemy iakąkolwiek inną liniią, i do tey spuściemy drugą prostopadłą

ſtopadłą od ſpodku pierwſzey proſtopadłey; poprowadziwſzy potym od którego kolwiek punktu pierwſzey proſtopadłey, liniią do punktu, w którym druga proſt opadła ſpotyka liniią pociągnioną na płaſzczyznie; ta oſtatnia liniia poprowadzona, proſtopadłą będzie do linii na płaſzczyznie pociągnioney.

Niech będzie SP, proſtopadła do płaſzczyzny; pociągniymy na teyże płaſzczyznie liniią AB, i ſpuśćmy do niey proſtopadłą PD od ſpodku P, linii SP. Poprowadziwſzy z punktu któregokolwiek, naprz: S, linii proſtopadłey SP, liniią SD, do punktu D, w którym proſtopadła PD ſpotyka liniią AB, ta liniia SD, będzie proſtopadłą do AB. *Tab: I. Fig: 3.*

Przez punkt P. przeciągniymy EF równoodległą od AB.

Ponieważ liniia SP proſtopadła ieſt do płaſzczyzny danay, będzie też proſtopadłą i do EF znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie; a wzaiemnie i EF będzie proſtopadłą do SP. Też liniia EF, iako równoodległa od AB, ieſt też proſtopadłą do PD; a zatym będąc proſtopadłą tak do PD, iako i do PS, będzie także pro-

ſtopadłą i do płaſzczyzny SPD przechodzącey przez te dwie linije; więc i AB równoodległa od EF będzie też proſtopadłą do płaſzczyzny SPD, a wſzczególności będzie proſtopadłą do linii SD, znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie.

18. *Twierdz:* 11. Gdy płaſzczyzna iedna proſtopadłą ieſt do drugiey, a przez którykolwiek punkt iedney z tych płaſzczyzny pociągniemy proſtopadłą do drugiey, ta proſtopadła, padnie na ſpolne przecięcie tych dwóch płaſzczyzn.

Dowodz: Gdyby liniia SP nie padała na ſpolne przecięcie dwóch płaſzczyzn, tedy ſpuściwſzy z tegoż ſamego punktu S, proſtopadłą, do ſpolnego przecięcia, ta byłaby oraz proſtopadłą i do drugiey płaſzczyzny, a zatym dwie proſtopadłe z iednego punktu ſpuſzczone byłyby, na iednę płaſzczyznę, co być nie może.

19. *Twierdz:* 12. Gdy dwie płaſzczyzny proſtopadłe ſą do trzeciey, ſpolne przecięcie tychże dwóch płaſzczyzn, proſtopadłe też będzie do teyże trzeciey płaſzczyzny.

Dowodz Od punktu, w którym liniia przecięcia dwóch pierwſzych płaſzczyzn,

ſpotyka

ſpotyka trzecią płaſzczyznę; pociągnąwſzy tak na iedney iak i na drugiey z dwóch pierwſzych płaſzczyzn proſtopadłe do dwóch liniy ſpolnego ich przecięcia z trzecią płaſzczyzną, te dwie proſtopadłe, proſtopadłemi też będą do trzeciey płaſzczyzny; a zatym gdyby te dwie proſtopadłe nie zeſzły ſię w iednę, i nie były w rzeczy ſamey iedną liniią, ktòra ieſt ſpolnym przecięciem dwóch pierwſzych płaſzczyzn, tedy od iednego punktu możnaby do iedney płaſzczyzny dwie proſtopadłe wyprowadzić; to zaś być nie może.

20. *Twierdz:* 13. Ggdy iedna liniia proſtopadłą ieſt do dwóch płaſzczyzn, te dwie płaſzczyzny, nigdzie ſię z ſobą nie zeydą, choćby naydaley były przedłużone.

Dowodz: Gdyby te dwie płaſzczyzny mogły ſię ſpotkać z ſobą, tedy Tróykąt zrobiony z tey proſtopadłey i z dwóch liniy poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na ſpolnym przecięciu dwoch tych płaſzczyzn, do punktów w ktòrych proſtopadła ſpotyka też płaſzczyzny, miałby dwa kąty proſte, co być nie może.

Defin: Dwie płaſzczyzny, które nawet przedłużone ſpotkać ſię z ſobą nie mogą, nazywaią ſię *równoodległemi.*

21. *Twierdz:* 14. Gdy dwie liniie ſą równoodległe względem dwóch drúgich, płaſzczyzna przechodząca przez dwie pierwſze liniie, będzie rownoodległa od płaſzczyzny przechodzącey przez dwie drugie liniie.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie liniie AB, AC równoodległe względem dwóch drugich DE, DF; płaſzczyzna przechodząca przez liniie AB, AC, rownoodległa będzie od płaſzczyzny przechodzącey przez liniie DE, DF.

Z wierzchołku A, kąta zawartego między dwiema pierwſzemi liniiami ſpuśćmy proſtopadłą AG do płaſzczyzny przechodzącey przez drugie dwie liniie, i od ſpodku G, tey proſtopadłey poprowadźmy na teyże ſamey płaſzczyznie liniie GH, GI, rownoodległe względem liniy DE, DF.

Liniia AG, proſtopadła do drugiey płaſzczyzny, ieſt też proſtopadłą, i do liniy GH, GI; a że liniie AC, GI, ſą obiedwie

biedwie równoodległe od linii DF, więc i od siebie są równoodległemi; a zatym liniia AG, iest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposobem pokazać można, że liniia AG, iest też prostopałą i do linii AB. Więc ta liniia AG, iest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey, przez linie AB, AC; a zatym i dwie płaszczyzny przechodzące iedna przez liniie AB, AC, druga przez liniie DE, DF, są obiedwie prostopadłe do teyże samey linii AG, a przeto są od siebie równoodległe.

22. *Twierdz*: 15, Gdy dwie płaszczyzny równoodległe od siebie przecina trzecia płaszczyzna, ich spólne przecięcia z trzecią płaszczyzną, będą też od siebie równoodległe.

Dowodz: Gdyby te spolne przecięcia, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdzie z sobą, tedy punkt przecięcia tych dwóch przecięć, należąc tak do iednego iak i do drugiego spolnego przecięcia, dwóch płaszczyzn z trzecią, należałby też tak do iedney, iak i do drugiey z dwóch płaszczyzn przecinaiących trzecią; a zatym dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, to iest nie byłyby, iak są, równoodległe.

23. *Twierdz*: 16. Gdy dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe; liniia która

ra ieſt proſtopadłą do iedney, z tych płaſzczyzn, będzie proſtopadłą i do drugiey.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie płaſzczyzny rownoodległe: BAC, EDF; i liniia AG proſtopadła, do iedney z tych płazczyzn nap: do pierwſzey; taż liniia proſtopadłą będzie i do drugiey płaſzczyzny.

Jeżeli liniia AG, nie ieſt proſtopadłą do ktoreykolwiek linii, takiey iak GH, przeciągnioney przez ſpodek G, teyże linii AG, ktory ieſt na płaſzczyznie EDF; tedy przeciągnąwſzy przez liniie GH, AG, płaſzczyznę, ktoraby przecieła płaſzczyznę BAC, w linii AB; liniia AG będzie proſtopadłą do linii AB; więc liniie AB, GH, z ktorych iedna ieſt, a druga nie ieſt proſtopadłą do linii AG, leżącey na teyże ſamey, co one, płaſzczyznie, ſpotkać ſię mogą z ſobą; a przeto i płaſzczyzny, na ktorych leżą ſpotkać ſię też z ſobą mogą, i nie będą rownoodległe; co ieſt przeciwko warunkowi,

24, *Twie:* 17. Gdy dwie liniie leżące albo nie leżące na iedney płaſzczyznie, przecięte ſą przez trzy rownoodległe od ſiebie pła-

płaſzczyzny, te linie będą od tych płaſzczyzn przecięte proporcyonalnie.

Niech będą dwie liniie AB. CD, leżące, albo nie, na iedney płaſzczyznie; niech trzy płaſzczyzny rownoodległe przecinaią pierwſzą liniią w punktach, B, F, A, a drugą w punktach, C,G,D; będzie, BF : AF = CG : DG. Tab. I. Fig: 8.

Poprowadźmy liniią BD, ſpotykaiącą płaſzczyznę średnią w punkcie E.

Liniie EF, AD, ſą ſpolnemi przecięciami płaſzczyzny BAD, z dwiema płaſzczyznami równoodległemi; więc te dwie liniie ſą od ſiebie równoodległe; a zatym podobne ſą Tróykąty: BFE, BAD; przeto, BF : AF = BE : ED.

Dla teyże przyczyny podobne będą Tróykąty; BDC, EDG, a zatym BE: ED = CG : GD. Więc też będzie, BF: AF = CG : GD.

Uwaga W tym razie tylko liniie BC, AD ſą równoodległe, i oraz liniie FE, EG, iednę czynią liniią, gdy liniie AB, CD na teyże ſamey płaſzczyznie znayduią ſię.

ROZDZIAŁ.

ROZDZIAŁ II.

O Kątach Bryłowych,

DEfin: Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaſzczyznie; od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokącie wyciągniymy linije do iednego punktu, nie na tey płaſzczyznie będącego. Przy tym punkcie tyle ſię zrobi kątów znayduiących ſię na odmiennych płaſzczyznach, ile Wielokąt nayprzod wykreślony, miał boków. Summa tych wſzyſtkich *kątów płaſkich*, nazywa ſię *kątem Bryłowym* (angulus ſolidus). Punkt, który ieſt ſpólnym wierzchołkiem wſzyſtkich kątów płaſkich, nazywa ſię: *wierzchołkiem* tego kąta bryłowego. Płaſzczyzny na których ſię znayduią kąty płaſkie, które ten wierzchołek czynią, nazwać można; *ścianami* (paries albo facies:) a zaś ſpolne tych płaſzczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arretes.*)

Przeſtroga. W tym wſzyſtkim, co ſię tu o kątach bryłowych powie; wyſtawiać ſobie trzeba nie inne Wielokąty, iak tylko te, których krawędzie ſchodząc

dząc ſię w ich wierzchołkach, ſame kąty wyſkakuiące tam czynią (b).

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym: ściany albo kąty płaſkie, które go tworzą, pochyłości wzaiemne tych ścian, i ſtoſunek placu zawartego między temi ścianami, do placu całego, około wierzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie ſpoſob, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaſkiego, względem całego placu, około wierzchołka tegoż kąta, na iedney z tym placem płaſzczyznie znayduiącego ſię. *Obacz niżey, co ſłuży do oſtatniey tey uwagi, w Rozdziale o kuli (Sphara.)* Jako Wielokąt, w którego wierzchołkach kończą ſię krawędzie kąta bryłowego, może być na Tróykąty podzielony przez przekątne ciągnione od iednego z wierzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek, podzielić można na inne kąty bryłowe, złożone z trzech tylko kątów płaſkich. Przeto i Geometrowie nay więcey ſię bawią około kątów bryłowych

(b) *Obacz o innych kątach bryłowych, Rozprawę P: Bermanna, pod tytułem* De angulis ſolidis. Diſſertatio. Vittembergæ 1764.

wych, trzema kątami płaſkiemi okreſlonych, aby doſzli pochyłości ścian, lub ich wielkości; a potym wiadome maiąc doſtatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczaią kąt bryłowy, który ſię z tych ścian układa. Część ta Geometryi, w którey o kątach bryłowych rzecz ieſt, pod tą, pod którą ie wyſtawuiemy poſtacią nazywa ſię Trygonometryą *kulną*, albo sferyczną. (Trigonometria ſpherica). Damy przyczynę tego nazwiſka, gdy ſię o kuli mówić będzie. Jeſt ta część koniecznie potrzebna Aſtronomom. Na daniu pierwſzych o niey początków, tu przeſtaniemy, i nie więcey mowić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle, ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podań ściągaiących ſię do ſamychże brył.

25, *Twierdz:* 1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, ſumma dwóch z tych trzech kątów, więkſza ieſt od kąta trzeciego.

Tab. II. Fig. 1. *Dowodz:* Niech będzie kąt bryłowy w A zrobiony z trzech kątów płaſkich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mnieyſzy ieſt od ſummy dwóch innych.

Jeżeli

Jeżeli te trzy kąty ſą wſzyſtkie równe, iuż oczywiście dwa, więkſze ſą od iednego.

Jeżeli zaś kąt ieden nap: BAC, więkſzy ieſt tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD, tedy wſzelako mnieyſzy będzie od ſummy obydwóch.

Zróbmy albowiem na płaſzczyznie BAC, kąt BAE równy kątowi nap: BAD; i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, nap: B; Przez trzy punkta: B, D, E, niech przechodzi płaſzczyzna przecinaiąca krawędź AC w punkcie C.

Dwa Tróykąty: BAD, BAE, maią bok ſpolny AB, boki: AD, AE, równe, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a wſzczególności, linije: BD, BE, ſą równe, Aże w Tróykącie BDC, ſumma boków: BD, CD więkſza ieſt od trzeciego boku: BC, więc bok DC, więkſzy ieſt od linii CE; a zatym Tróykąty: CAD, CAE maią bok ſpolny AC, boki: AD, AE, równe; podſtawa zaś DC, jednego więkſza ieſt od podſtawy CE, drugiego; więc kąt: CAD, w wierzchołku

[illegible] pier-

pierwszego Tróykąta, większy iest od kąta: CAE, w wierzchołku drugiego; więc i summa kątow: BAD, CAD, większa iest od summy kątów: BAE, CAE, to iest: większa od kąta BAC.

26. *Twierdz:* 2. W kącie bryłowym, summa wszystkich kątów płaskich, mnieysza iest od summy czterech kątów prostych. (c)

Dowodz: Wierzchołki Wielokąta, na który h wspieraią się wszystkie krawędzie kąta bryłowego, są oraz wierzchołkami tylu innych kątów bryłowych zrobionych

---

(c) *Trzeba mieć na pamięci, że się tu nie mówi, tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wspieraią się na wierzchołkach Wielokąta, maiącego same tylko kąty wyskakuiące. W przypadku od tego odmiennym, mogą być kąty bryłowe takie, w których summa kątów płaskich, będzie większa od 4. kątów prostych tyle, ile zechcemy. P. Le Sage Genewenczyk pierwszy tę prawdę odkrył, która też pierwsza i sama iedna zdaie się uchybienie zadawać Euklidesowi. Obacz Historyą Akademii Nauk Paryskiey na Rok 1756.*

bionych przez kąty trzy płaſkie, ile ten Wielokąt ma wierzchołków; gdyż każde dwa z tych kątów płaſkich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduią ſię przy podſtawach ścian tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podſtawy kąta bryłowego w wierzchołku, to ieſt: do Wielokąta na którym ſię wſzyſtkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku, wſpieraią.

Na każdey z tych ścian ſumma trzech kątów, iednego w wierzchołku, a dwóch przy podſtawie ściany, równa ſię ſummie dwoch kątów proſtych; a za tym ſumma wſzyſtkich kątów w wierzchołku i wſzyſtkich kątów przy podſtawach ścian, równać ſię będzie, dwom kątom proſtym tyle razy wziętym, ile ma ścian kąt bryłowy.

Summa dwóch kątów przy podſtawach ścian, więkſza ieſt od kąta trzeciego przy podſtawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtemi robi kąt ieden bryłowy przy tey podſtawie; a zatym ſumma wſzyſtkich kątów przy podſtwach ścian wſzyſtkich, więkſza ieſt od ſummy wſzyſtkich kątów przy podſtawie kąta bryłowego.

Więc.

Więc fummie wfzyftkich kątów, przy podftawach ścian, mniey nie doftaie do fummy dwa razy tylu kątów proftych, ile Wielokąt, czyli podftawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli fummie wfzyftkich kątów Wielokąta tego nie doftaie do teyże fummy dwa razy tylu kątów proftych, ile ten Wielokąt ma boków.

A że fummie katów wfzyftkich Wielokąta do przerzeczoney fummy, brakuie 4. kątów proftych, więc fummie kątów wfzyftkich przy podftawach ścian, brakować będzie do teyże fummy mniey niż 4. kąty profte. Ze zaś fumma wfzyftkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, fpełnia ten niedoftatek mnieyfzy od 4. kątów proftych, więc fumma wfzyftkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, mnieyfza ieft od 4. kątów proftych.

To Twierdzenie obiaśnić trzeba przez wiele przykładów fzczegulnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego nap: 3, 4. 5. 6. i t. d. w których to razach, takoważ liczba 3, 4, 5, 6, i t. d. będzie wyrażać boki Wielokąta fłużącego kątowi bryłowemu za podftawę; fumma zaś kątow

tów Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów proſtych, a zatym ſumma kątów przy podſtawach ścian będzie ważyć więcey niż 2, 4, 6, 8, i t, d. kątów proſtych. Że zaś ſumma tych oſtatnich kątów wraz z ſummą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach, kątów proſtych 6, 8, 10, 12, więc ſumma kątów ſamych przy tym wierzchołku mnieyſza ieſt, niż *nadmiar* (exceſsus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

To ieſt: ta ſumma kątów przy wierzchołku mnieyſza ieſt od 4. kątów proſtych.

Można prawdę tego Twierdzenia okazać i w ſpoſób naſtępuiący:

Obierzmy punkt iakikolwiek, wpośród Wielokąta, i pociągniymy od niego linije do wſzyſtkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wſzyſtkich kątów, około tego punktu, zrówna ſummę 4. kątów proſtych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaſzczyznę Wielokąta,

podług

podług ciągu linii proſtopadłey do tey płaſzczyzny. Im bardziey ten punkt oddalony będzie od wierzchołków Wielokąta, tym bardziey zmnieyſzy ſię każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniiami, od niego poprowadzonemi do wierzchołków Wielokąta; a zatym tym mnieyſza będzie ſumma wſzytkich kątów przy tym punkcie, od ſummy pierwſzey 4. kątów proſtych.

27. *Przyſtoſowanie.* Pięć tylko ieſt gatunków kątów należących do Wielokątów foremnych, z których może ſię złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Tróykąta równobocznego, każdy taki kąt ważyłby $\frac{2}{3}$ kąta proſtego, a zatym ſumma ich ważyłaby 2. kąty proſte.

2. W kącie bryłowym, złożonym z czterech kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów, ważyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proſte.

3. W kącie bryłowym, złożonym z pięciu kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proſte. Sześć

Sześć kątów Tróykata równobocznego, waży katów proſtych cztery. Są one zdatne do napełnienia placu, około punktu jakiego na płaszczyznie, nie zaś do zrobienia kata bryłowego. Summa wiecey niż ſześciu takowych katów, ważyłaby też więcey niż cztery kąty proſte.

4. W kacie bryłowym złożonym z trzech katów kwadratu, każdy takowy kat, byłby katem proſtym, a zatym ſumma takowych kątów równałaby ſię ſummie 3 katów proſtych; ſumma 4 katów kwadratu, byłaby ſummą 4 katów proſtych; a przeto z 4 takowych katów ſkładać ſię nie może kat bryłowy, daleko zaś bardziey ſkładać ſię nie może z większey liczby takich kątów.

5. W kacie bryłowym, złożonym z trzech katów, Pięciokata foremnego, każdy takowy kat ważyłby $1\frac{1}{5}$ kat proſty; a zatym ſumma ich ważyłaby $3\frac{3}{5}$ kąty proſte.

Summa czterech takowych katów, a tym bardziey więcey niż czterech ważyłaby więcey, niż cztery kąty proſte.

D Sum-

Summa trzech kątów Sześciokąta foremnego waży cztery kąty proste, a zatym żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta foremnego; tym bardziey zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów foremnych, które więcey niż sześć boków maią.

Jeżeli tedy znayduią się bryły iakie, których ścianami są Wielokąty iednakowego tylko gatunku, takich brył gatunków, więcey iak pięć być nie może.

Bryła, którey każdy kąt bryłowy złożony iest z trzech kątów Tróykąta równobocznego, ma 4. ściany, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywa się *Czworościanem* (Tetraëdrum).

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 4. kątów Tróykąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 6. kątów bryłowych. Nazywa się *Ośmiościanem* (Octoëdrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 5 kątów Tróykąta równobocznego, ma

ma 20. ścian. z których każda iest Troykątem równobocznym, i 12, kątów bryłowych. Nazywa się *Dwudziestościanem* (Icosaëdrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda iest kwadratem, i 8 kątów bryłowych. Nazywa się *Sześcianem* (Hexaëdrum,) a zwyczayniey (*Cubus*)

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 3 kątów Pięciokąta foremnego, ma 12 ścian, z których każda iest Pięciokątem foremnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywa się *Dwunastościanem* (Dodecaëdrum.)

Dosyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obszerne w tey mierze rozwodzenia się, które więcey samey ciekawości dogadzaią, niż pożytek przynoszą. Te bryły, gdy wszystkie kąty maią równe, i wszystkie ściany foremne, i mogące przystać iedne do drugich, nazywaią się bryłami *foremnemi*.

Gdyby w kącie bryłowym pomieszać chcieliśmy różne kąty Wielokątów foremnych, końcem złożenia tegoż kąta

brylowego, liczba takich kątów płaſkich, mogłaby być do upodobania powiękſzona.

28. *Twierdz:* 3. Gdy dwa katy brylowe złożone ſą z trzech kątów płaſkich, równych iednych, względem drugich; pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych równe też ſą iedne względem drugich.

Tab. II Fig. 2. Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD, abcd złożone z równych kątów względem ſiebie: BAD. bad. BAC. bac, DAC, dac; pochyłości płaſzczyzn równe też będą iedne względem drugich; nap: pochyłość płaſzczyzny BAD do BAC, równa ieſt pochyłości płaſzczyzny bad, do bac.

Wykreśl: Weźmy równe liniie AB, ab, na płaſzczyznach: BAD, bad: wynieśmy do AB proſtopadłą BD, a do ab, proſtopadłą bd. Na płaſzczyznach także BAC, bac, wyprowadzmy do tychze linii AB, ab, proſtopadłe: BC, bc. Kąty CBD. cbd. będą kątami pochyłości płaſzczyzn BAD, BAC, i bad, bac; a zatym dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd, ſą równe.

Dowodz:

Dowodz: Dwa Tróykąty DBA, dba ſą proſtokątne w B i b; maią równe kąty BAD, bad, i boki: AB, ab, równe; więc mogą przyſtać do ſiebie; a wſzczegulności, liniie: BD, bd ſą równe, iako też i liniie AD, ad.

Dla teyże przyczyny i Tróykąty BAC, bac przyſtać do ſiebie mogą, a wſzczegulności liniie BC, bc, ſą równe, iako też i liniie AC, ac.

Więc Tróykąty CAD, cad, maią boki AC, ac równe; i boki AD, ad także równe, a maiąc oprocz tego i kąty między temi bokami zawarte, równe, przyſtać do ſiebie mogą; wſzczegulności zas linie CD, cd, ſą równe.

Więc Tróykąty: CBD, cbd, maią wſzyſtkie boki równe, iedne względem drugich, a zatym do ſiebie przyſtać mogą; a wſzczegulności kąty: CBD, cbd, ſą równe.

29. *Twierdz*: 4. Gdy dwa kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów płaskich, które równe ſą iedne względem drugich, takie kąty bryłowe, mogą przyſtać do ſiebie,

Niech

Niech będzie kąt bryłowy w A. złożony z trzech kątów płaskich: BAD, BAC, DAC, równych względem kątów płaskich: bad, bac, dac, z których się składa kąt drugi bryłowy w *a*.; te dwa kąty bryłowe, mogą przystać do siebie.

Wystawmy sobie w myśli drugi z tych kątów, jakoby przeniesiony, tak; aby wierzchołek a. przypadł na wierzchołek A: linija zaś ab aby leżała na linii AB. Ponieważ kąty: BAD, bad, wzięte są za równe, linija więc ad, będzie też leżeć na linii AD.

Aże trzy kąty płaskie w *a*, równe są trzem kątom w A: równe więc będą pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i płaszczyzn bad, bac; a zatym płaszczyzna bac. leżeć będzie na płaszczyznie BAC. Dla równości zaś kątów bac, BAC, linija ac leżeć będzie na linii AC; więc tak linija ad, leży na linii AD, jak i ac na AC; a zatym płaszczyzna cad przystanie do płaszczyzny CAD; przystaną tedy do siebie te dwa kąty bryłowe.

30. *Wniosek.* Kąt bryłowy, określony trzema kątami płaskiemi, już tym samym jest wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaskie.

Możnaby

Możnaby też pokazać, że z trzech kątów płaskich czyniących kąt bryłowy maiąc wiadome dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścian, wyznacza się także kąt bryłowy; iako też z wiadomey tylko pochyłości wszystkich trzech ścian tego kąta.

Te, iednak ostatnie podania, iż niesłużą do naszego zamierzenia, przeto dosyć iest tu o nich tylko namienić.

31. *Zagadn:* 1. Zrobić kąt bryłowy, maiąc dane trzy kąty płaskie, z których ma być złożony tenże kąt bryłowy.

Do składu tego kąta bryłowego z 3, kątów płaskich; następuiący sposob, zdaie się być naywygodnieyszym.

Niech będą dane trzy kąty płaskie: BAD, BAC, DAC, do zrobienia kąta bryłowego. Wystawmy sobie myślą, iż ten kąt iuż iest zrobiony. Weźmy którykolwiek punkt C, na krawędzi nap: AC; i od tego punktu, spuśćmy na inne krawędzie, AB, AD, linije prostopadłe: CB, CD; a znowu od punktów B, i D, na płaszczyznie BAD, poprowadźmy do teyże krawędzi, prostopadłe: BE, DE, *Tab: II.* *Fig: 3.*

które

które się przetną, w punkcie E. Pociągniymy nakoniec linije: CE, AE.

Ponieważ liniie CB, EB są prostopadłe do linii AB, liniia więc AB iest prostopadłą do płaszczyzny: CBE; a zatym płaszczyzna BAD, która przechodzi przez liniią AB, iest też prostopadłą do płaszczyzny: CBE; a wzaiemnie, i ta płaszczyzna iest do tamtey prostopadłą. Dla teyże przyczyny, płaszczyzna, CDE, prostopadłą iest do płaszczyzny BAD; więc obiedwie płaszczyzny: CBE, CDE, prostopadłe są do płaszczyzny: BAD; a zatym spolne ich przecięcie CE, iest także prostopadłym do płaszczyzny BAD; i płaszczyzna CAE, iest także prostopadłą do teyże płaszczyzny BAD. Zkąd wypada takowe wykreślenie.

Po obydwóch stronach linii ac, przy punkcie a, nakreślmy kąty: cab, cad, równe względem kątów danych CAB, CAD. Od punktu któregokolwiek teyże linii ac, nap: od c spuśćmy na dwa drugie ramiona, ab, ad, liniie prostopadłe: cb, cd; a na ramionach trzeciego kąta weźmy, zacząwszy od wierzchołka A, liniie AB, AD, równe względem liniy ab, ad. Od punktów B, i D wy-

pro-

prowadźmy proſtopadłe do liniy AB, AD, przecinaiące ſię w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu proſtopadłą EC, do płaszczyzny BAD. Niech przez liniie EC, i AE przechodzi inna płaszyzna, na którey z punktu A, iak ze środka, promieniem równym odległości ac, nakreślmy łuk koła, który przetnie proſtopadłą EC, punkcie C; Naoſtatek przez punkt C, i liniie AB, AD, niech przechodzą dwie płaſzczyzny te, wraz z płaſzyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którego ſzukamy.

Jnaczey ieſzcze punkt C, będzie wyznaczony na proſtopadłey EC; gdy tylą liniią, EC, weźmiemy, aby kwadrat iey równał ſię różnicy kwadratów: linii ac, i AE, albo różnicy kwadratów: cd, i DE, albo nakoniec różnicy kwadratów: be i BE.

32. *Uwaga.* Używaiąc tego wykreślenia, można łatwo dowieść naſtępuiące Twierdzenie, na którym ſię zaſadza Trygonometrya kulna; to ieſt, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, wſtawa iednego kąta płaſkiego, ieſt do wſtawy

drugie.

drugiego, iak wſtawa kąta pochyłości przeciwnego pierwſzemu kątowi, do wſtawy kąta pochyłości przeciwnego drugiemu kątowi; to ieſt, iak wſtawa kąta pochyłosci płaszczyzn dwóch ścian pod pierwſzym kątem będących, do wſtawy kąta pochyłości dwóch także ścian pod drugim kątem będących.

Jakoż linije : CD, CB, ſą wſtawami, pierwſza kąta CAD, drugą, kąta CAB, wziąwſzy za promień liniią AC; a zatym te dwie linije tak ſię do ſiebie maią, iak wſtawy tych dwòch kątów.

Aże w Tróykącie ECD proſtokątnym w E; CD : CE = Pr: Wſt. CDE

A w Tróyk. EBC; CE: CB = Wſt:CBE:Pr:

Więc złożywſzy te ſtoſunki, będzie; CD:CB = Wſt: CBE: Wſt. CDE.

To ieſt: Wſtawa kąta CAD, tak ſię ma do wſtawy kąta CAB, iak wſtawa kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wſtawy kąta pochyłości dwóch płaſzczyzn BAD, CAD.

32. *Zagadn:*

33. *Zagadn:* 2. Maiąc dane trzy kąty płaſkie, z których ſię ma ſkładać kąt bryłowy, wyrachować, iaka ma być pochyłość płaſzczyzn, aby ten kąt zrobiły.

Spoſob 1. W Czworokącie ABED, katy przeciwne B. i D ſą proſte: więc Czworokat ten może być w koło wpiſanym, a zatym kąty (w tymże ſamym odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawſzy tedy w Tróykącie BAD kąt ADB, iuż tym ſamym znaydziemy i kąt AEB, równy tamtemu.

Stoſunek boku BC do BE, to ieſt ſtoſunek wſtawy całey, czyli promienia, do Doſtawy kąta pochyłości CBE, ſkłada ſie z ſtoſunków boków: BC do AB i AB do BE.

Ażeieſt; BC: AB=Styez. BAC:Wſt. całey,

i - AB: BE=Wſt.cała: Doſtycz. AEB

więc; BC: BE=Sſtycz. BAC: Doſt. AEB
A zatym;
Stycz.—BAC: Doſt: AEB=Pr:Doſt:CBE.

Spoſob 2. Wyciągnowſzy od punktu iednego nap: B znayduiącegoſię na którey kol-

reykolwiek krawędzi kąta bryłowego, proſtopadłe: BD, BC, do tey krawędzi, a na dwóch płaſzczyznach, których ſpolnym przecięciem ieſt ta krawędź, niech te dwie proſtopadłe ſpotykaią dwie drugie krawędzie w punktach: C, I D: Liniie BC, BD będą ſtycznemi, a liniie AC, AD będą ſiecznemi względem kątów, BAC, BAD, biorąc za promień liniią AB. Więc te liniie, mogą być wyrachowane na miarę linii ſtałey AB, czyli promienia. W Tróykącie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, miedzy niemi zawarty możemy wyznaczyć bok trzeci CD. W Tróykącie zatym CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a ztąd możemy wyznaczyć kąt CBD, który ieſt kątem pochyłości dwóch płaſzczyzn: BAD. BAC. Jnne też kąty pochyłości łatwo wyznaczemy podług uwagi poprzedzaiącey.

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podnieſieniu liczby do iey Sześcianu albo Kubusa, *i o wyciągnieniu Pierwiaſtku Sześciennego, albo Kubicznego.*

Przed naſtępuiącemi Rozdziałami, kładzie ſię nauka o podnieſieniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Pierwiaſtku ſześcien-

ſześciennego; bo właśnie w tych rozdziałach, można będzie naukę tę do praktyki zaraz przyſtoſować.

34. Sześcian liczby iakiey robi ſię, gdy tę liczbę przez nią ſamą raz mnożemy, i tak rozmnożoną, ieſzcze raz przez nia mnożemy albo, co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożemy przez iey kwadrat. I tak Sześciany dziewięciu liczb pierwſzych.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ſą: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześciany liczb:

10, 20, 30, 40, - - - 90.

ſą; 1000, 8000, 27000, 64000, - - - 729000.

Sześciany liczb:

100, 200, 300, - - 900.

ſą: 1000000, 8000000, 27000000, 729000000.

35. Sześciany więc liczb maiących iedną tylko cyfrę, a reſztę zerów, ſą te

ſame,

ſame, co i ſześciany tychże cyſr ſamych przez ſię, przydawſzy im trzy razy tyle zerów, ile ich było w liczbie z którey ſię Sześcian robi.

Wyraz ten *Sześcian*, wzięty ieſt z Geometryi, w którey, aby mieć bryłowatość iakiego Sześcianu, rozmnaża ſię liczba wyrażaiąca wielkość boku iego, raz i drugi przez ſiebie.

Sześcian każdey liczby znaleść można, mnożąc iey kwadrat przez nią ſamę; podamy tu iednak inny ſpoſob zrobienia Sześcianu z liczby daney, a ten ſposób pomoże nam do przeciwnego działania, to ieſt do wyciągania Pierwiaſtku Sześciennego z liczby iakieykolwiek.

36. Sześcian liczby złożony z dwóch części, może być rozłożony na cztery części naſtępuiące.

1. Na Sześcian pierwſzey części.

2. Na Kwadrat pierwſzey części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.

3. Na Kwadrat drugiey części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część pierwſzą.

4. Na

4. Na Sześcian drugiey części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części naprzyk: 1, i 4; można uważać iey Sześcian, iakoby złożony z czterech części: 1, 12, 48, 64, których Summa iest: 125. Gdybyśmy zaś tę samę liczbę 5, uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iey Sześcian mogłby się był rozłożyć na cztery części: 8. 36, 54, 27.

Niechby potrzeba znaleść Sześcian liczby np: 47; Ponieważ iey kwadrat (podług reguły iuż nam wiadomey) składa się z kwadratu pierwszey części 40, z teyże części 40, dwa razy wziętey, przez drugą, 7. rozmnożoney, i z kwadratu drugiey części 7; mnożąc cały ten kwadrat jeszcze raz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcian z 47 składać się będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożonego przez 7, z 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu teyże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą;) biorąc znowu 40, za liczbę mnożącą; Sześcian z 47, składać się jeszcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat

liczby

liczby 40, dwa razy wzięty; i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty; a razem to wszystko zebrawszy, składać się będzie z Sześcianu liczby 40, z kwadratu teyże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7, z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7. Co uczyni Summę: 103823, która iest Sześcianem liczby 47.

Ponieważ zaś niemożna ieszcze dowieść tego Algebraicznie, trzeba przynaymniey będzie z Geometryi zaciągnąć obiaśnienia, pokazuiąc; że Sześcian linii złożoney z dwóch części, może być w rzeczy samey rozłożony na Sześciany każdey, z tych dwóch części, i na 6. Równoległościanow, z których trzy mieć będą za podstawę kwadrat iedney części; a za wysokość część drugą: trzy zaś inne, mieć będą za podstawe kwadrat drugiey części, a za wysokość część pierwszą.

Wykonać to w skutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papieru tak zrobionym, aby te części od siebie się oddzielały.

38. Nay-

33. Naywygodniey ieſt, rozłożyć liczbę na iedności, dzieſiątki, ſta, i t. d. które w ſobie zawiera.

Niech będzie liczba nap: 12. Podzielmy ią na dwie części, 10, i 2. Sześcian iey ſkładać ſię będzie z części naſtępuiących:

1000. Sześcan dzieſiątku

600. Kwadrat dzieſiątku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.

120. Kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dzieſiątek rozmnożony

8. Sześcian dwóch iedności.

1728 Sześcian z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana na dwie części 80, i 4; Sześcian iey mieć będzie części naſtępuiące:

512000. Sześcian dziesiątków,
76800. Kwadrat dziesiątków trzy razy wzięty, przez iedności romnożony.
3840. Kwadrat tychże iedności trzy razy wzięty przez dziesiątki rozmnożony.
64. Sześcian z iedności.

592704. Sześcian z 84.

Niech będzie liczba 324. rozebrana na dwie części 320 i 4; aby zaś mieć Sześcian pierwszey części, rozłożmy ią na części 300, i 20,

27000000. Sześcian stów
5400000. Kwadrat stów potróyny przez dziesiątki rozmnożony.
360000. Kwadrat dziesiątków potróyny przez sta rozmnożony.

8000. Sześcian dziesiątków.

1228800. Kwadrat z 320 potróyny rozmnożony przez iedności

15360. Kwadrat z iedności potróyny, rozmnożony przez 320.
64. Sześcian iedności.

34012224. Sześcian z 324.

Niechby

Niechby trzeba zrobić Sześcian z 8421.

512000000000	Sześcian z 8000.
76800000000	Kwadrat z 8000 potróyny, roz: przez 400.
3840000000.	Kwadrat z 400 potróyny roz: przez 8000.
64000000.	Sześcian z 400.
4233600000.	Kwadrat z 8400 potróyny rozm: przez 20.
10080000.	Kwadrat z 20. potróyny rozmn: przez 8400.
8000.	Sześcian z 20.
212689200.	Kwadrat z 8420 potróyny rozmn: przez 1.
25260.	Kwadrat z 1. potróyny rozmn: przez 8420.
1.	Sześcian z 1.

597160402461. Sześcian z 8421.

 39. Wi-

39. Widziemy na poprzedzaiących przykładach, iż przez takowy rozbior, każda część następuiąca Sześciann mniey ma iednym zerem, od części, która ią poprzedziła; i że iako pierwsza część Sześcianu iest zawsze Sześcianem, a po nim następuią dwie części, każda złożona z potróynego kwadratu iedney części rozmnożonego przez część drugą; tak i daley, tymże porządkiem idą, i dalsze wyrazy części składaiących Sześcian.

40. Można było opuścić zera kładąc tylko same cyfry znaczące, a w każdey części następuiącey występuiąc z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześcianu mogły być w ten sposób wypisane.

```
27
 54
  36
   8
 12288
   1536
     64.
34012224.
```

41. Ten

41. Ten ſposob poſtępowania, pokazuie nam, że liczba wyrażaiąca Sześcian iedności, kończy ſię na oſtatniey po prawey ręce cyfrze, że Sześcian dzieſiątków kończy ſię na czwartey od prawey ręki cyfrze; liczba Sześcianu ſtów, kończy ſię na ſiodmey cyfrze od teyże ſtrony rachuiąc, i t, d.

Zeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażaiących Pierwiaſtek Sześcianu danego, trzeba od prawey ſtrony zaczynaiąc, oddziały co trzy cyfry kreſkami poczynić; a ile będzie tych oddziałów, tyle też cyfr będzie ſię znaydowało w Pierwiaſtku. Oddział pierwſzy po lewey ſtronie może mieć trzy, dwie, a czaſem i iednę tylko cyfrę, iako to przykłady poprzedzaiące okazuią. I tak Pierwiaſtki ſześcienne liczb 1,331; 32,767; 226,981; maią dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331, wyciągnąć pierwiaſtek ſześcienny:

Ta liczba ma dwie cyfry w ſwoim Pierwiaſtku, bo dwa w niey ůczynić można oddziały, tym ſpoſobem: 1,331. Naywiękſza liczba dzieſiątków tego Pierwiaſtku taka być powinna, aby iey

Sześcian

Sześcian nie był więkſzy od 1; a zatym będzie tylko ieden dzieſiątek w Pierwiaſtku. Sześcian z 10, ieſt: 1000; który Sześcian odiąwſzy od 1331, zoſtanie 331. Tą reſzta powinna zamykać w ſobie potróyny kwadrat dzieſiątka rozmnożony przez iedności; potróyny kwadrat tych iedności, rozmnożony przez dzieſiątek, i Sześcian tychże iedności. Aże wſzczegulności ta reſzta, ma w ſobie zamykać kwadrat potróyny dzieſiatka rozmnożony przez iedności; wyſtawmy więc ſobie tę reſztę 331, iak gdyby zamykała tylko ſam potróyny kwadrat z 10, to ieſt 300. Wieloraz z 331. przez 300 podzielonych, ieſt: 1, więc iedną iedność będzie w Pierwiaſtku. Rozmnożywſzy 300 przez 1, będzie 300, a te, od 331, odiąwſzy, zoſtanie 31. Ta reſzta ma ieſzcze w ſobie zamykać potróyny kwadrat iedności przez dzieſiątek rozmnożony, to ieſt: 30; i Sześcian iedności, to ieſt: 1, a zewſzyſtkim 31, które odiąwſzy od oſtatniey reſzty nic nie zoſtanie; a zatym Pierwiaſtek ſześcienny liczby 1331, ieſt: 11.

Wyciągniymy Pierwiaſtek ſześcienny z liczby 68,921. Pierwiaſtek tey liczby ma dwie cyfry. Liczba dzieſiątków ta-

ka

ka być powinna, aby Sześcian iey odiąć można od pierwszego podziału: 68. Aże z Tablicy dziewiąciu pierwszych sześcianów (34) którą uczniowie umieć na pamięć powinni, Sześcian naybliższy 68; iest 64. a tego Pierwiastek iest: 4; więc w Pierwiastku będą 4 dziesiątki. Sześcian z 40, iest: 64000; odiąwszy go od 68921, zostanie 4921. Ta reszta ma wszczegulności zawierać w sobie potròyny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, to iest ma w sobie zawierać 4800 rozmnożone przez iedności. Dzieląc 4921. przez 4800, wypada 1, na wieloraz, więc będzie w Pierwiastku iedna iedność. Odiąwszy od 4921. kwadrat potróyny 4800. rozmnożony przez 1, zostanie 121. Ta reszta ma ieszcze w sobie zawierać kwadrat potróyny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki, to iest 120, i Sześcian iedności, to iest 1, a ze wszystkim, 121; które odiąwszy od ostatniey reszty, nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek zupełny będzie: 41.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 884,636. Tateż liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku. Sześcian naybliższy liczby 884. iest: 729, któ-

rego

rego Pierwiaſtkiem ieſt: 9, więc Pierwiaſtek będzie miał 9 dzieſiątków. Sześcian z 90, ieſt 729000; który odiąwszy od 884736, zoſtanie 155736. Kwadrat z 90, ieſt 8100, potròyny będzie: 24300. Dzieląc przez 24300, reſztę 155736, na wieloraz wypada 6, więc Pierwiaſtek mieć będzie 6. iedności. Rozmnożywſzy 24300 przez 6, będzie 145800, które odiąwſzy od 155736, zoſtanie 9936. Kwadrat potróyny 6 iedności, rozmnożony przez 9 dzieſiątków, będzie 9720, odiąwſzy go od 9936, zoſtanie 216, nakoniec Sześcian z 6, ieſt 216; a zatym Pierwiaſtek zupełny będzie 96. Jakoż Sześcian z 96, ieſt: 884,736.

Wyciągniymy Pierwiaſtek ſześcienny z liczby 590,589,719. Ten powinien mieć trzy cyfry.

Liczba ſtów w Pierwiaſtku taka być powinna, aby iey Sześcian, nieprzechodził 590. Z dziewięciu pierwſzych Sześcianów, naybliżſzy liczby 590 ieſt Sześcian: 512, którego Pierwiaſtek; ieſt 8; a zatym 8 ſtów będzie w Pierwiaſtku. Odiąwſzy 512000000, od Sześcianu danego, zoſtanie 78589719. Kwadrat

drat potróyny ftów 8, albo 800, to ieft 1920000 znayduie fię razy 40 w tey refzcie; mogłoby więc zdawać fię, iż 4 dziefiątki Pierwiaftek mieć powinien; aleby nie można od 78589719 odiąć dwóch innych części, to ieft kwadratu potróynego dziefiątków rozmnożonego przez fta, i Sześcianu dziefiątków; nie można przeto więcey dać Pierwiaftkowi, iak 3 dziefiątki. Liczbę 1920000, rozmnożoną przez 30, to ieft 57600000, odiąwfzy od 78589719, zoftanie 20989719; od tey refzty odiąwfzy znowu kwadrat potróyny 3 dziefiątków, przez fta rozmnożonych, to ieft 2160000, zoftaie 18829719 a po odięciu Sześcianu dziefiątków, to ieft 27000, będzie wreście, 18802719, Kwadrat potróyny części Pierwiaftku znalezioney, to ieft liczby 830, ieft 2066700; przez ten dzieląc refztę 18802719, wypadnie 9 iedności na wieloraz. Odiąwfzy od tey refzty, liczbę 2066700, rozmnożoną przez 9, to ieft: 18600300, zoftanie 202419; zkąd znowu odiąwfzy kwadrat potróyny iedności 9, rozmnożony przez 830, to ieft 201690, zoftaie 729. Naoftatek Sześcian z 9 ieft: 729, a zatym Pierwiaftek którego fzukaliśmy będzie 839.

Wzor

Wzor działań w przykładach poprzedzaiących.

Przykład 1.	Przykład 2.
1,331.|10.	68.921|40
1 000|	64 000|
300| 331|1.	4800| 4 921|1.
| 300|	| 4800|
31.	121.
30	120
1.	1
1	1
0	0

Przykład

Przykład 3.

```
      884.736.|90.
      729000  |
      ---------
24300| 155736 |6.
     | 145800 |
     ----------
        9936.
        9720.
        -----
         216.
         216.
        -----
           0.
```

Przykład 4.

```
         590,589,719,|800
         512 000 000 |
         -------------
        |78589719|30.
1920000 |57600000|
        ----------
         20989719.
          2160000
         ---------
         18829719.
            27000
         ---------
        |18802719|9
2066700 |18600300|
        ----------
           202419
           201690
           ------
              729
              729
              ---
               0.
```

Więcey takowych przykładów należy podać Uczniom, nie używaiąc ieszcze żadnego skrócenia.

45. Pierwſze ſkrócenie, na tym zawiſło, aby opuſzczać zera, w liczbach dzielących, podzielnych, i w wielorazach; maiąc iednak zawſze uwagę na mieyſca, które zaſtępować przypada cyfrom znaczącym. W ſzczególności zaś co do wielorazow, będzie ten z opuſzczania zerów pożytek, że zaraz przy ſobie, kłaść będzie można cyfry wyrażaiące Pierwiaſtek, którego ſzukamy.

Drugie ſkrócenie, związane z pierwſzym na tym ſię zaſadza, aby do każdego naſtępuiącego dzielenia, tyle tylko cyfr z Sześcianu przyłączać do reſzty pozoſtałey, ile ich wyciągać będzie przypadaiące odeymowanie; daremna albowiem byłaby praca, przy każdym odeymowaniu, wſzyſtkie pozoſtałe Sześcianu cyfry nanowo wypisywać, ponieważ oſtatnie zwłaſzcza cyfry przez większą część działania nie naruſzone zoſtaią.

Trzecie ſkrócenie na tym zawiſło, aby za iednym razem odiąć kwadrat potróyny części znalezioney, rozmnożony przez część naſtępuiącą; kwadrat potróyny teyże części drugiey, rozmnożony przez część pierwſzą znalezioną, i Sześcian tey

tey części drugiey. To zaś wykona ſię, dodaiąc razem te trzy liczby odeymować ſię maiące, i tak dodane odeymuiąc od Sześcianu, z którego Pierwiaſtek wyciągamy. Zawſze iednak mieć trzeba na to uwagę, aby w liczbach, które pierwey dodawać, a potym ich ſummę odeymować mamy, zachowane było mieyſce każdey cyfrze właściwe; iako też wzgląd mieć należy na położenie cyfrów tych, od których inne odeymować przypada.

Przyſtoſowanie. Niechby z liczby 257,259,456, trzeba wyciągać Pierwiaſtek Sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy. Naywiękſzy Sześcian zawarty w 257, ieſt 216, którego Pierwiaſtek ieſt: 6, odiąwſzy ten Sześcian od 257, zoſtanie 41. Do tey reſzty przyłączmy naſtępuiący oddział 259, będzie 41259. Niemaiąc tym czaſem względu na oſtatnie dwie cyfry: 59, dzielmy 412 przez potròyny kwadrat z 6, to ieſt przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz ſummę trzech liczb: 324. 162. 27 to ieſt kwadratu potróynego z 6. ſtów rozmnożonego przez 3 dzieſiątki, kwadratu potróynego z 3 dzieſiątków rozmnożonego przez 6. ſtów, i Sześcianu z 3 dzieſiątków. Sum-

mę

mę 34047 odeymiymy od 41259, zostanie 7212; przy których przypisawszy ostatni oddział 456, będzie 7212456. Nie uważaiąc tym czasem na ostatnie dwie cyfry, dzielmy 72124 przez kwadrat potróyny z części Pierwiastku znalezioney, to iest przez 11907, wypadnie 6, na wieloraz. Weźmy summę trzech liczb: $\begin{array}{r}71442\\6804\\216\end{array}$ to iest kwadrat potroyny części pierwey znalezioney, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potróyny z 6. iedności rozimnożony przez część pierwey znalezioną, i Sześcian z 6. iedności. Summa 7212456 równa się reszcie ostatniey; co znakiem iest że Pierwiastek, którego szukaliśmy, ani mnieyszy ani większy iest, iak 636.

To działanie bardziey długie, niż trudne, wyciąga od uczniów częstego w nim ćwiczenia się.

44. Aby wyciągnąć Pierwiastek Sześcienny z ułomku, którego tak licznik. iako i mianownik iest Sześcianem; trzeba go osobno wyciągać z każdego z tych wyrazów. I tak Pierwiastek sześcienny z $\frac{125}{216}$. iest: $\frac{5}{6}$. Pierwiastek z $\frac{64}{343}$. iest: $\frac{4}{7}$. Aby zaś wyciągnąć Pierwiastek Sześcienny z liczby mieszaney,

trzeba

trzeba ią pierwey zamienić na ułomek. I tak Pierwiaſtki ſześcienne liczb mieſzanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$, ſą te ſame co i ułomków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$, to ieſt: $\frac{3}{2}$, $\frac{10}{3}$, albo $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$.

45. Co ſię o Pierwiaſtku kwadratowym powiedziało (w Części 1. Geom: § 128) ściąga ſię i do Pierwiaſtku ſześciennego; to ieſt; że ieżeli nie można mieć Pierwiaſtku Sześciennego liczby całkowitey, w liczbach całkowitych, tedy go i w ułomkach nie znaydziemy. Dowodzi ſię to ogulnie tymże ſamym, iak względem Pierwiaſtku kwadratowego ſpoſobem. (d)

46. Pierwiaſtek Sześcienny liczby iakiey, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Spoſob naygulnieyſzy ieſt, używaiąc do tego ułomków dzieſiątnych. Niechby naprzykład trzeba z 2 wyciągnąć Pierwiaſtek

---

(d) Otoż i drugi rodzay ilości nie ſpółmiernych. Pierwſzego rodzaiu ilości nieſpółmierne można Geometrycznie wyrazić: lecz wyrażenie tych drugich wyżſzey nad początkową nauki potrzebuie.

ſtek ześcienny, przybliżaiąc go do prawdziwego w czaſtkach tyſiącznych. Wyciągaymy ten Pierwiaſtek, ſposobem dopiero podanym, z liczby 2000000,000, a oſtatnie trzy tego Pierwiaſtku cyfry połozmy za dzieſiątne. Pierwiaſtek Sześcienny liczby: 2000000000 w liczbach całkowitych nayblizſzych wyrażony, ieſt: 1259; a zatym Pierwiaſtek Sześcienny liczby 2, przybliżony aż do części tyſiącznych iedności będzie 1,259. Jakoż Sześcian z 1,259, ieſt: 1,995616979 mnieyſzy od 2. a Sześcian 1,26, ieſt: 2,259576, większy od 2.

47. Chcąc Pierwiaſtek ſześcienny liczby np: 2, przybliżyć do prawdziwego, w ułomkach zwyczaynych, podwoiwszy pierwſze dziewięć Sześcianów liczb *naturalnych*. 1.2.3.4. i t. d. uważać należy (podobnie iako ſie o przybliżeniu Pierwiaſtku kwadratowego w Części I. powiedziało:) ieżeli między temi Sześcianami podwoionemi, nieznayduie ſie taki, któryby bliſki bardzo był Sześcianu zupełnego. Znaydziemy np: że 64. podwoione, to ieſt 128. mało ſie co różni od 125, to ieſt od Sześcianu liczby 5; a zatym 2, które równa ſie cale $\frac{128}{64}$; będzie też prawie równe $\frac{125}{64}$;

przeto

przeto i Pierwiastek Sześcienny liczby 2, będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. Aby zaś poprawić ten pierwszy mniey dokładny Pierwiastek Sześcienny, podzielemy rożnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, to iest, $\frac{3}{64}$, przez kwadrat potróyny tego pierwszego Pierwiastku to iest przez $\frac{75}{16}$, i wieloraz $\frac{1}{100}$, dodamy do Pierwiastku $\frac{5}{4}$; Summa $\frac{126}{100}$, będzie Pierwiastkiem bardziey przybliżonym. Jakoż Sześcian z $\frac{126}{100}$ iest $2\frac{376}{1000000}$; a i to uchybienie możnaby ieszcze zmnieyszyć podobnym iak wyżey sposobem.

Niechby z liczby 3, trzeba wyciągnąć Pierwiastek sześcienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa się zupełnie $\frac{1029}{343}$, a niewiele się różni od $\frac{1000}{343}$; a zatym Pierwiastek Sześcienny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$, a poprawuiąc to pierwsze uchybienie, Pierwiastek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie $\frac{3029}{2100}$.

48, Gdy ani licznik ani mianownik iakiego ułomku, nie iest Sześcianem; trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu, [illegible] F [illegible] miano.

mianownik ſtał ſię Sześcianem; potym dopiero wyciąga ſię Pierwiaſtek z licznika, przez przybliżenie, a wyciągniony, dzieli ſię przez Pierwiaſtek zupełny mianownika. I tak chcąc wyciągnąć Pierwiaſtek ſześcienny z $\frac{1}{4}$; zamieniam ten ułomek na $\frac{2}{8}$; a wyciągnąwſzy z 2, przez przybliżenie Pierwiaſtek ſześcienny: 1,259 -- biorę iego połowę 0,629 ---; to ieſt: dzielę go przez Pierwiaſtek ſześcienny mianownika 8; Podobnie Pierwiaſtek Sześcienny z $\frac{1}{12}$, ten ſam ieſt, co i Pierwiaſtek Sześcienny z $\frac{90}{1080}$; to ieſt $\frac{1}{6}$. Pierwiaſtku ſześciennego z 90.

ROZDZIAŁ III.

O Równoległościanach proſtokątnych (e).

49. *DEfin:* Gdy Bryła iaka zakończona ieſt ſześcią ścianami proſtokątnem, taka Bryła nazywa ſię, *Rowno-legło-*

(e) *Częſte używanie Równoległościanów proſtokątnych ieſt nam pobudką do mówienia o nich w ſzczególności: tym bardziey, że przez to przyſpoſobią ſię Uczniowie do zamieniania z większą łatwością innych nie proſtokątnych Rowno ległościanów na proſtokątne.*

ległościanem prostokątnym (Parallelopipedum Rectangulum).

50. *Twierdz.* I. W każdym Równoległościanie prostokątnym, Sciany na przeciwko siebie stoiące, są równe i równoodległe; a każda z tych ścian w szczególności prostopadłą iest do każdey z czterech innych ścian, ktòre z nią spólny maią bok ieden.

Niech będzie ABCDEFGH. Równoległościan prostokątny; spolne dwóch ścian: GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłym iest do dwóch innych boków: BC, BA należących do tychże Scian, więc to przecięcie iest też prostopadłym i do płaszczyzny przechodzącey przez linije AB, BC, to iest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatym ABGH, BCFG, które przechodzą przez to spolne przecięcie GB, są do ściany ABCD, prostopadłe. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których spolnym przecięciem iest liniia ED; a zatym cztery ściany Równoległościanu prostokątnego, są prostopadłe do tey ściany, z którą maią po iednym boku spolnym. Tab. II. Fig. 4.

Dowiedliśmy że liniia GB, prostopadłą iest do ściany ABCD. Podobnie do-

 wieść-

wieśćby można, że taż liniia ieſt proſtopadłą i do ściany GFEH; więc te obie ściany ſą proſtopadłe do iedney linii GB, a zatym ſą od ſiebie równoodległe.

Na oſtatek w Proſtokącie ABGH liniie przeciwne AB, GH ſą równe; iako też i liniie BC, FG, a zatym dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przyſtać do ſiebie.

51. *Uwaga*. Ponieważ w Równoległościanie proſtokątnym z czterech ścian otaczaiących ten Równoległościan, każda ma ieden bok ſpolny z bokiem iedney ściany z dwóch pozoſtałych; przeto można wyſtawić ſobie *rodzenie ſię* (generatio albo formatio) Równoległościanu proſtokątnego, w ſposob naſtępujący.

Niech będzie Proſtokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszyſtkich wyſtawione ſą proſtopadłe do iego płaſzczyzny wſzyſtkie równe. Niech ten Proſtokąt poſuwa ſię równoodlegle od pierwſzego ſwego położenia, i tak aby wierzchołki kątów iego wzdłuż liniy proſtopadłych wznoſiły ſie. Mieyſce to, które takowym poſuwaniem ſię przey-

przeydzie Prostokąt, będzie Równoległoscianem prostokątnym.

52. *Defin:* Równoległościan prostokątny, którego wszystkie sciany są kwadratami, nazywamy *Sześcianem*, albo z Łacińskiego, *Kubusem*.

Sześcian więc, iest to Bryła zakończona sześcią kwadratami. Wypływa zaś z Twierdzenia poprzedzaiącego, że te 6. kwadratów, są równe, żę każde z nich dwa, na przeciwko siebie stoiące, są równoodległe, i że cztery z tych kwadratów wspieraiące się na czterech bokach kwadratu iednego z dwóch kwadratów pozostałych, są do tego kwadratu prostopadłe.

Wystawiwszy sobie Równoległościan prostokątny, iako zbudowany na iedney z ścian swoich, prostopadła spuszczona na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, nazywa się *wysokością* tego Równoległościanu. Ta zaś wysokość równa iest spolnemu przecięciu dwóch ścian zbudowanych na dwóch przyległych sobie bokach podstawy.

53. *Twier:*

53, *Twierdz.* 2. Gdy podſtawy dwóch Równoległościanów mogą przyſtać do ſiebie, a ich wysokości ſą równe, te dwa Równoległościany, mogą też przyſtać do ſiebie, to ieſt nie różnią ſię od ſiebie tylko mieyſcem.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany tych dwóch Równoległościanów, podobnie położone, moga przyſtać do ſiebie; wſzyſtkie też tych Równoległościanów kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów proſtych, a zatym wszyſtkie te kąty bryłowe mogą przyſtać do ſiebie. Przenioſzy tedy myślą ieden z tych Równoległościanów, tak, aby ieden z kątów iego bryłowych, przyſtał do iednego z kątów bryłowych Równoległościanu drugiego, i aby ściany pierwſzego kąta, które mogą przyſtać do ścian drugiego, w ſamey rzeczy do niego przyſtały, wſzytkie końce krawędzi pierwſzego kąta, przyſtaną do końców krawędzi odpowiadaiących przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwſzego Równoległościanu, które ſą przy końcach tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego Równoległościanu, będące przy końcakch tychże ścian odpowiadaiących

54.

pierwszym; zatym i te kąty bryłowe przyſtaną iedne do drugich.

54. *Wniosek.* Podzieliwszy wyſokość iakiego Równoległościanu proſtokątnego na pewną liczbę części równych, a przez te wszyſtkie punkta podziału przeciągnąwſzy płaszczyzny równoodległe od podſtawy; Równoległościan podzielony będzie na tyle Równoległościanów mnieyszych, które przyſtać do ſiebie mogą, na ile części była podzielona wysokość; będą albowiem miały te wszyſtkie Równoległościany mnieysze, iednakową wyſokość, a takie podſtawy, z których każda przyſtać może do podſtawy wielkiego Równoległościanu.

55. *Twierdz;* 3. Dwa Równoległościany proſtokątne, wyſtawione na teyże ſamey podſtawie, lub na podſtawach mogących przyſtać do ſiebie, tak ſię maią ieden do drugiego, iak ich wysokości.

Dowodz: 1. Gdyby wyſokość iednego, Równoległościanu, była dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od wysokości drugiego; pierwszy Równoległościan, mógłby ſię podzielić na 2, 3, 4, i t. d.

i t. d. Równoległościany mogące przyſtać do drugiego; a zatym ten pierwszy Równoległościan byłby też większy od drugiego, 2, 3. 4, i t. d. razy, Co przyſtosować można, i w innych przypadkach, gdzieby tylko wyſokość iednego Równoległościanu zawierała w ſobie zupełnie wyſokość drugiego.

2. Gdyby zaś wysokość iednego Równoległościanu zawierała nap. 3. takich części; jakich 5 zawiera wysokośc drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwſzą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych częśc', a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podſtaw, podzielilibyśmy pierwszy Równoległościan na 3, a drugi na 5. Równoległościanów iednakowey wysokośc:, i których podſtawy przyſtaćby mogły do ſiebie; a zatym pierwszy Równoległościan takby ſię miał do drugiego iak 3, do 5, to ieſt iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to ſłuży i do innego iakiegokolwiek ſtosunku.

Na koniec, to, có ſię powiedziało w przypadkach ſpołmiernych, przyſtosować można i do przypadków nie ſpołmier-

miernych, tak iakośmy uczynili mówiąc o figurach płaskich, w Części I.

Jakoż niech będą AB. CD wysokości dwóch Równoległościanów prostokątnych, zbudowanych na teyże samey podstawie, albo na podstawach mogących do siebie przystać; i niech te wysokości będą niespołmierne; wszelako dwa takie Równoległościany mieć się do siebie będą, iak ich wysokości. *Tab. II. Fig: 5.*

Gdyby albowiem stosunek tych dwóch Równoległościanów nie był równy stosunkowi ich wysokości, tedy iedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do uczynienia tey równości stosunków. Niechże więc ieżeli to być może, stosunek pierwszego Równoległościanu, do drugiego, będzie równy stosunkowi linii AE, (większey od AB) do CD.

Podzielmy liniią CD na pewną liczbę części równych mnieyszych iednak od różnicy BE, i przenieśmy iednę z tych części na liniią AB; tyle razy, ile można; ostatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniozłszy daley ku E, iednę ieszcze taką część, punkt podziału padnie między B i E, nap. w F.

Rownoległościany maiące iednakowe podstawy, a wysokości spółmierne CD, i AF, będą do siebie iak te wysokości CD i AF.

Aże (przez przypuszczenie) Równoległościan, którego wysokością iest AB, tak się ma do Równoległościanu, ktorego wysokością iest CD, iak się ma linia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie stosunków) Rownoległościany, których wysokosciami są AB, i AF, miałyby się do siebie, iak linie AE, i AF; Że zaś pierwszy poprzednik mnieyszy iest od swego następnika, a drugi poprzednik większy od swego następnika, więc proporcya ta niema mieysca, a zatym stosunek Równoległościanów, których AB, i CD, są wysokościami, nie iest różnym od stosunku tychże wysokości.

To samo w krótkości tak się wyraża: Niech będą oznaczone przez R.AB, R.AF, R.CD, Równoległościany maiące iednakowe podstawy, wysokości zaś: AB AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcyą:

R. AB: R. CD = AE: CD.

tedy ponieważ iest; - - R. CD: R. AF = CD: AF.

byćby powinno - - R. AB: R. AF = AE: AF.

Ta zaś ostatnia proporcya utrzymać się nie może, więc ani pierwsza.

56. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany, maiące iednakowe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy.

Przenieśmy ieden z tych Równoległościanów, tak, aby podstawa iego stykała się w wierzchołku spolnym, z drugą podstawą. Niech ABCD będzie iedną z tych podstaw; a druga: EBGF. Dopełniymy Prostokąta, CBGH przedłużywszy boki, DC, FG, aż do ich spolnego przecięcia, w punkcie H; i wystawmy sobie wmyśli Równoległościan trzeci stoiący na podstawie CBGH, dawszy mu wysokość równą wysokości, iednakowey dwóch danych Równoległościanów. Równoległościan, którego podstawa iest: ABCD, i ten, którego podstawa iest: CBGH, wystawuiąc ie sobie iak gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby linia CB, a drugim, wysokość spolna obydwóch danych Równoległościanów; te mowię Równoległościany są do siebie iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Prostokąty ABCD i CBGH. *Tab: II. Fig. 6.*

Podobnie Równoległościany, których, CBGH, i BEFG. są podstawami, uważane,

ne, iak gdyby miały za podſtawę Proſtokąt, którego iednym, bokiem byłaby liniia BG, a drugim ſpolna wysokość dwóch danych Równoległościanów ſą także do ſiebie, iak ich wyſokości, BC, BE, albo iak Proſtokąt, CBGH, do Proſtokąta BEFG.

Więc (przez złożenie ſtoſunków) Równoległościan, którego podſtawą ieſt ABCD, tak ſię ma do Równoległościanu, którego podſtawą ieſt BEFG, iak ſię ma pierwsza podſtawa do drugiey.

Kròcey to ſamo.

Niech Równoległościany, których podſtawami ſą Proſtokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami naſtępującemi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya,

R. ABCD : R. CBGH = ABCD : CBGH.

2. proporcya;

R. CBGH : R. BEFG = CBGH : BEFG.

więc

R. ABCD : R. BEFG = ABCD : BEFG.

57. *Wno-*

Wniosek 1. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią równe tak wysokości, iak i podstawy, są równe; także, ieżeli równe dwa Równoległościany prostokątne, maią równe podstawy, równe będą i ich wysokości; albo ieżeli równe maią wysokości, równe będą i ich podstawy.

58. *Wniosek* 2. Można zawsze zamienić, albo w myśli zamienionym sobie wystawić Równoległościan ieden prostokątny, na drugi, iednakową z nim wysokość maiący, a któryby za podstawę miał Prostokąt, z iednym bokiem danym; to się zaś stanie, zamieniaiąc podstawę Równoległościanu danego, na Prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości, są równe; i wzaiemnie, ieżeli dwa Równoległościany są równe, będą podstawy ich, w stosunku odwrótnym ich wysokości.

Niech będzie ABCD podstawa, a BI wysokość Równoległościanu iednego Prosto- *Tab. II. Fig. 6.*

proftokątnego; drugiego zaś Równoległościanu niech będzie podftawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podftawami y wysokościami proporcya:

ABCD : BEFG = BL : BI, tedy te Równoległościany będą równe.

Wyftawmy fobie drugi Równoległościan, iakoby zamieniony na inny teyże famey wysokości BL, a maiący za ieden bok fwoiey podftawy, bok nap: BC, należący do podftawy pierwfzego Równoległościanu, i niech będzie tego nowego Równoległościanu podftawa CBMN.

Będzie zatym podftawa ABCD do podftawy BEFG. iak AB do BM; a żeśmy też przypuścili ABCD : BEFG = BL: BI, więc będzie AB: BM = BL: BI, a zatym Proftokąt maiący za boki, AB, BI. równy będzie Proftokątowi maiącemu za boki: BM, BL: Ze zaś pierwszy i trzeci Równoległościan maią za podftawy te dwa równe Proftokąty, i fpolną przytym maią wysokość BC, więc fą fobie równe. Aże trzeci Równoległościan równy ieft drugiemu, więc i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech

2. Niech Równoległościan, którego ABCD iest podstawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległościanowi, którego podstawą iest BEFG: a wysokością BL; idzie zatym że,
ABCD: BEFG = BL: BI.

Zrobmy to samo co wyżey wykreślenie.

Uważaiąc pierwszy i trzeci Równoległościan, iako maiące za wysokość spolną LC, będzie pierwszy do trzeciego iak Prostokąt AB × BI do Prost: BM × BL. Aże te dwa Równoległościany są (przez przypuszczenie, albo wykreślenie) równe drugiemu, więc i sobie są równe, więc AB × BI = BM × BL; a zatym AB: BM = BL: BI. Ze zaś AB: BM = ABCD: CBMN = ABCD: BEFG; więc ABCD: BEFG = BL: BI.

60. *Wniosek.* Z tego wszystkiego co się powiedziało, wynika sposob znalezienia dwóch liniy, któreby były do siebie w stosunku dwóch Równoległościanów zawieraiących boki dane.

Przykład. Maiąc dany Sześcian i Równoległościan prostokątny, znaleść linią taką, aby stosunek Sześcianu do Ró-

wnoległościanu równy był ſtosunkowi boku Sześcianu do tey linii.

Niech będzie S bok Sześcianu, P,Q;R, boki trzy Rownoległościanu. Zamieńmy nayprzod Próſtokąt, którego bokami ſą P, i Q na inny, któryby miał za bok ieden, bok Sześcianu; to ieſt ſzukaymy czwartey proporcyonalney do S, P, i Q; Niech będzie L, tą czwartą proporcyonalną. Równoległościan dany, równy będzie innemu, któryby miał za boki: S,L,R; a zatym ſtosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać ſię będzie ſtosunkowi kwadratu S^2 do Proſtokąta $L \times R$. Zamieńmy znowu ten drugi Rownoległościan równy danemu, na inny, któryby znowu miał S za bok ieden, to ieſt ſzukaymy czwartey proporcyonalney do S, L, i R. Niech będzie M, tą czwartą proporcyonalną: Równoległościan drugi, a zatym i pierwszy dany, iemu równy, równać ſię będzie trzeciemu, któryby miał za boki: S, S, M; więc ſtosunek Sześcianu do Rownoległościanu danego, równać ſię będzie ſtosunkowi kwadratu S^2 do proſtokąta $S \times M$, to ieſt ſtosunkowi S, do M.

Aby tedy znaleść w liniiach. ſtosunek Sześcianu do Równoległościanu, proſtokątne-

kątnego, trzeba 1°. do boku Sześcianu, i do dwóch boków Równoległościanu szukać czwartey proporcyonalney; 2°. trzeba znowu do tegoż boku trzeciego, Równoległościanu, i do czwartey proporcyonalney dopiero znalezioney, szukać inney czwartey proporcyonalney; a stosunek boku Sześcianu, do tey ostatniey linii, równy będzie stosunkowi Sześcianu do Równoległościanu.

Idzie zatym, że ieżeli mamy dwa Równoległościany prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniiach ich stosunek, szukaiąc w liniach stosunku tychże Równoległościanów do iakiego Sześcianu; wziąwszy albowiem bok tego Sześcianu, za poprzednika, każdego z tych stosunków; stosunek ich następników, wyrażać będzie stosunek w liniiach, tych dwóch Równoległościanów.

61. *Uwaga.* Wszystko to, co się powiedziało o przyrównywaniu, albo mierze Geometryczney Równoległościanów prostokątnych, zgadza się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce o przyrównywaniu liczebnym Równoległościanów.

Przykł. Niech iedność wyraża bok Sześcianu wziętego za miarę do przyrównywania; a niech boki Równoległościanu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawieraią ten bok Sześcianu kilka razy oznaczonemi przez liczby nap. 5, 7, i 9. Czwarta proporcyonalna do boku Sześcianu, i do dwóch pierwſzych boków Równoległościanu wyrazi ſię przez liczbę 35, to ieſt zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35; czwartą zaś drugą proporcyonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległościanu i do pierwſzey czwartey proporcyonalney, wyrazi liczba 315; to ieſt zawierać ta będzie bok ſześcianu, razy 315. A zatym Równoległościan, zawierać będzie w ſobie Sześcian razy 315; to ieſt, wziąwſzy Sześcian za iedność albo ſpolną miarę; ten Równoległościan wyrazi ſię przez liczbę 315, która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5. 7, i 9.

62. *Defin.* Gdy cztery takie mamy linije, że ſtoſunki, pierwſzey do drugiey, drugiey do trzeciey, trzeciey do czwartey ſą równe, o takich liniiach mowi ſię, że ſą *ciągło* (continuè) proporcyonalne.

Przykłady

Przykłady liczebne: Cztery liczby: 1,2,4,8, nazywaią się ciągło proporcyonalnemi, a cztery linie, któreby tak się do siebie miały, iak te cztery liczby nazywałyby się też ciągło proporcyonalnemi. Toż mowić i o liczbach, 8,12,18,27, z których każda zawiera w sobie, poprzedzaiącą ieden raz i pół, i t. d.

Stosunek pierwszey z tych linii, do czwartey, składa się z stosunku pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, i trzeciey do czwartey (a to przez definicyą stosunku składanego). Że zaś wszystkie te szczególne stosunki są równe, więc stosunek pierwszey tey linii do czwartey, składa się z 3 stosunków równych, ma zaś nazwisko stosunku *troymnożnego* (ratio triplicata) i pierwsza ta linia do czwartey, będzie w stosunku tróymnożnym.

63. *Przystosowanie*. Niechby Równoległościan, który wymierzać mamy przez Sześcian wzięty za iedność, był i on sam Sześcianem.

Niech będzie AB bok Sześcianu maiącego służyć za miarę: AC bok Sześcianu który wymierzyć mamy. Szukaymy do AB, i AC, trzeciey proporcyonalney AE Tab. II. Fig. 7.

 (kresląc

(kreśląc Tróykąt proſtokątny ABC, maiący, AB za iedno ramie kąta proſtego, a AC za przeciwproſtkątną; i wyſtawuiąc do linii AC, w punkcie C, proſtopadłą CE, aż do iey ſpotkania ſię w E, z liniią AB przedłużoną) Szukaymy daley do AB, AC, AE, czwartey proporcyonalney, AF) wyprowadzaiąc od punktu E linii AE, proſtopadłą EF, aż do iey ſpotkania ſię w punkcie F z linią AC przedłużoną) Pierwſzy Sześcian, wzięty za miarę, tak ſię będzie miał do Sześcianu, który wymierzać przypada, iak liniia AB, do linii AF; to ieſt: iak liniia pierwſza do czwartey z liniy ciągło proporcyonalnych; z których pierwſzych dwóch iedna ieſt bokiem Sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem Sześcianu wziętego do wymierzenia; a zatym ſtoſunek pierwſzego Sześcianu do drugiego ieſt tróymnożnym ſtoſunku ich boków.

I tak, ieżeli bok Sześcianu iakiegoś trzy razy zawiera w ſobie bok Sześcianu wziętego za miarę, Sześcian pierwſzy będzie do drugiego, iak 3 × 3 × 3 do 1. albo iak 27, do 1; to ieſt ieżeli liniia AC zawiera w ſobie razy trzy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie trzy razy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie razy 3

liniią

liniią AC, a zatym 9 razy liniią AB, a liniia AF zawierać będzie 3 razy liniią AE, a tym samym 27 razy liniią AB.

64. *Wzaiemnie.* Gdy trzeba znaleść Sześcian, którvby do drugiego był w stosunku danym, i takim, któryby się równał stosunkowi boku Sześcianu tego drugiego, do linii daney: bok Sześcianu, którego szukamy, ma być drugą liniią z czterech ciągło proporcyonalnych, między któremi pierwsza z czwartą, są w danym stosunku; to iest: bok ten szukany, ma być liniią pierwszą z dwóch średnich ciągło proporcyonalnych między pierwszą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może być rozwiązane przez Geometryą początkową, chyba trefunkiem przez doświadczanie i szukanie niepewne; do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynaymniey z liniy krzywych, nazwanych *przecięciami konicznemi* (sectiones conicæ), o których się potym namieni. I toć to zagadnienie o znalezieniu dwóch średnich proporcyonalnych, pierwszym powodem być musiało Geometrom, do uważania, tych liniy krzywych dopiero wspomnionych, i do uczynienia pierwsze-

go

go kroku w wyżſzey Geometryi. Gdy ſię w *Delos* radzono Wyroczni, coby za ſpoſób był iednania Bogów zagniewanych, i odwrócenia zarazy powietrza niſzczącego Państwo Attyckie; miał ſię dać głos ſłyſzeć: aby *dwumnożono ołtarze* (duplicentur Altaria). Po wielu niepożytecznych zawodach, poſtrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleść bok Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak drugi wzięty za ſpolną miarę; to ieſt: iż trzeba było wynaleść pierwſzą z dwóch średnich Geometrycznych, między dwiema liniiami, z których iedna dwa razy w ſobię zamykałaby drugą.

65. W Arytmetyce; gdy ſtoſunek dany, ieſt ſtoſunkiem liczby iedney Sześcienney, do drugiey także Sześcienney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak nap: gdyby dwa Sześciany miały być do ſiebie, iak 1. do 8; albo iak 1 do 27, albo iak 8 do 27. i t. d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1. do 2, albo iak 1. do 3, albo iak 2, do 3. i t.d.

Ale gdy ſtoſunek dany nie ieſt ſtoſunkiem dwóch liczb Sześciennych, rozwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy Sześcian ieden,

ma być dwa razy tak wielki, iak drugi, wziąwszy bok tego drugiego, za iedność, bok pierwszego powinienby być wyrażony przez liczbę taką, którey Sześcianem, iest 2; a zatym pierwiastek Sześcienny, liczby 2, wyrażałby ten bok; Pierwiastek zaś ten przybliżony, iest 1,26 to iest bok mnieyszego Sześcianu, tak by się miał do boku Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak 1, do 1,26, albo iak 100, do 126. albo ieszcze dokładniey iak 23, do 29.

66. *Uwaga.* Gdy stosunek dwóch liniy iest dany; dany iest tym samym i stosunek ich Sześcianów.

Tak albowiem mieć się będą do siebie te Sześciany, iak liniia pierwsza do czwartey ciągło proporcyonalney, wziąwszy za pierwsze dwa wyrazy tey proporcyi dwie liniie których stosunek iest dany.

Zkąd wypada wniosek następuiący:

67. Gdy cztery liniie są w proporcyi, ich Sześciany w proporcyi też będą; to iest; gdy stosunek dwóch pierwszych liniy równa się stosunkowi dwóch drugich; stosunek też Sześcianów z dwóch

pier-

pierwſzych liniy, równać ſię będzie ſtoſunkowi Sześcianów z dwóch drugich liniy.

W Arytmetyce: cztery licz: 2, 3, 8, 12 ſkładaią proporcyą
ich Sześciany: - - 8, 27, 512, 1728, ſkładaią także proporcyą.

68 *Uwaga.* Podanie zamknięte w tym wnioſku, ieſt tylko wyſzczegulnieniem podania naſtępuiącego:

Niech będą trzy iakiekolwiek proporcye, i cztery takie Rownoległościany proſtokątne; aby krawędzie pierwſzego Rownoległościanu, były trzema poprzednikami trzech pierwſzych ſtoſunków, krawędzie drugiego, trzema naſtępnikami tychże trzech pierwſzych ſtoſunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami, trzech drugich ſtoſunków, a krawędzie czwartego, trzema naſtępnikami tychże trzech drugich ſtoſunków; ſtoſunek pierwſzych dwóch Rownoległościanów równy będzie ſtoſunkowi dwóch oſtatnich.

Trzeba naprzod to podanie objaśnić na przykładach liczebnych.

W ogul

W ogulności zaś niech będą trzy iakie-
kolwiek proporcye: A : B = C : D.

a : b = c : d.

a : *b* = *c* : *d*.

Zamieńmy stosunek A do B na inny b do czwartey linii *E*: Zamienmy podobnie i stosunek C do D na inny d, do czwartey linii *e*.

Będą podstawy drugiego i czwartego Równoległościanu równe prostokątom B × b, i, D × d : a zatym podstawy dwóch pierwszych Równoległościanów będą się miały, do siebie iak a do *E*, a podstawy zaś dwóch drugich Równoległościanów będą się miały do siebie iak c do *e*.

Aże przez przypuszczenie i wykreślenie stosunki ; A do B, b do *E*, C do D, d do *e*, są wszystkie równe,

więc b : *E* = d : *e*.

Ze zaś a : b = c : d

więc a : *E* = c : *e*.

A zatym stosunek podstaw Równoległościanów dwóch pierwszych, równy

iest

ieſt ſtoſunkowi Równoległościanów dwóch drugich.

Jeſt też z przypuſzczenia;

$a : b = c : d$

więc Proſtokąty aa, Eb, cc, ed ſkładą proporcyą; a zatym cztery Równoległościany; któreby te Proſtokąty miały za podſtawy, i z których dwa pierwſze miałyby ſpólną wyſokość A, dwa zaś drugie wyſokość C, byłyby także z ſobą w proporcyi, Aże pierwſzy z tych Równoległościanów miałby za krawędzie trzy liniie: A, a, a, drugi zaś równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie trzy liniie: B, b, b: a to dla tego, że ſą równe Proſtokąty: B × b i A × E) trzeci z tych Równoległościanów miałby za krawędzie, trzy liniie: C, c, c, a czwarty równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie, trzy liniie: D, d, d; więc te cztery Równoległościany byłyby w proporcyi.

RO·

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nie prostokątnych.

69. D*Efin*: Bryła zakończona 6 ścianami parzysto równoległemi, nazywa się *Równoległościanem* a zatym Równoległościany prostokątne, o których w Rozdziale poprzedzaiącym mowa była, są pewnym gatunkiem Równoległościanów.

70. *Twierdz.* 1. W Równoległościanie, wszystkie ściany sa Równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne, mogą przystać do siebie.

Niech będzie Równoległościan ABCDEFGH; wszystkie iego ściany są Równoległobokami, a ściany przeciwne nap: ABCD, EFGH mogą do siebie przystać. *Tab. III Fig. 1*

Dowodz: Ponieważ płaszczyzny równoodległe ABCD, GHFE, są przecięte trzecią płaszczyzną BGFC, więc ich spólne przecięcia BC, FG z tą płaszczyzną, są równoodległe. Także pokazać można, że liniie HE, GF są równoodległe, i liniie: HG, EF równoodległe; a zatym

że

że ściana HGFE iest Równoległobokiem. Podobnie i wszystkie inne ściany są także Równoległobokami.

W szczegulności zaś, liniie: BA, GH, i liniie BC, GE, są od siebie równoodległemi; więc równe są kąty ABC, HGF. Aże te liniie BA, GF, i BC, GF są równe, więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przystać do siebie. Toż mowić o każdey inney parze ścian przeciwnych.

71. Ztąd też wystawić sobie można każdy Równoległościan, iakoby utworzył się następuiącym sposobem:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok; a od iednego z iego wierzchołków wyciągnimy liniią czyniącą z iego płaszczyzną, kąt iakikolwiek; wyciągnimy potym i przez drugie wierzchołki, liniie równoodległe od pierwszey, i zrobmy wszystkie sobie równemi. Niech nakoniec ten Równoległobok posuwa się równoodlegle od pierwszego swego położenia, i niech wierzchołki iego nie schodzą nigdy z liniy równoodległych, mieysce od Równoległoboków, tym sposobem przebyte, będzie Równoległościanem.

72. *Twierdz.*

72. *Twierdz. 2.* Dwa Równoległościany mogą przyſtać do ſiebie, gdy i wſzyſtkie ich odpowiadaiące ſobie ściany przyſtać do ſiebie mogą, i gdy kąty ich bryłowe także ſobie odpowiadaiące, robią ſię z kątów równych należących do tychże ścian.

Niech będą dwa Równoległościany: AF, af, których wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie w iednym i w drugim Równoległościanie, mogą przyſtać do ſiebie, i których kąty bryłowe także ſobie odpowiadaiące nap: A, i a, robią ſię z równych kątów tychże ścian; te dwa Równoległościany przyſtać de ſiebie mogą. *Tab: III Fig: 18 i 22.*

Dowodz: Ponieważ kąty bryłowe, A, i a, robią ſię z równych względem ſiebie kątów płaſkich, więc przyſtać do ſiebie mogą. Przenioſłſzy tedy Równoległościan af, tak aby kąt bryłowy a, przyſtał w rzeczy ſamey do kąta bryłowego A; ponieważ i kąty płaſkie, z których ſię te bryłowe robią, przyſtaią iedne do drugich ſobie równych; a linie ab, ad, ah, ſą równe względem liniy AB, AD, AH; więc punkta: b, d, h przyſtaną do punktów: B,D,H, i ściany także

że czyniące dwa kąty bryłowe a, i A, przyſtaną iedne do drugich; a zatym i punkta: c, g, e, przyſtaną do punktów odpowiadaiących ſobie: C, G, E; a wſzczegulności liniie: bc, bg, przyſtaną do liniy: BC, BG. Więc i płaſzczyzna przechodząca przez liniie: bc, bg, leżeć będzie na płaſzczyznie przechodzącey przez liniie BC, BG. Że zaś przypuściliśmy iż ściana bcfg, przyſtać może do ściany BCFG, więc punkt f, przyſtanie do punktu F.

Tymże ſpoſobem okazać można, że i wſzyſtkie inne ściany, i kąty Równoległościanu af, przenieſionego, przyſtaną do innych ścian i kątów Równoległościanu AF, a zatym te dwa Równoległościany przyſtać do ſiebie mogą.

73. *Uwaga.* Tymże cale ſpoſobem dowodzi ſię, że dwie iakiekolwiek Bryły, przyſtać mogą do ſiebie, gdy wſzyſtkie kąty ich bryłowe odpowiadaiące ſobie, przyſtać także do ſiebie mogą, i gdy ściany iedney Bryły przyſtać mogą do ścian odpowiadaiących w drugiey Bryle.

73. *Definicya.* Uważaiąc Równoległościan iakoby zbudowany na iedney z ścian ſwoich, ta ściana nazywa ſię, *podſtawą* iego; a proſtopadła od punktu którego kolwiek ściany przeciwney, do tey

ſpu-

ſpuſzczona, nazywa ſię *wyſokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podſtawy, ſą do niey proſtopodłemi, taki Rownoległościan nazywa ſię *proſtym* (Parallelopipedum rectum) Równoległościany proſtokątne, ſą gatunkiem Równoległościanów proſtych, w których podſtawa nawet ſama ieſt proſtokątem.

75. *Twierdz.* 3. Dwa Równoległościany równe ſą w *bryłowatości* (ſoliditas) gdy maią iednakową wyſokość, i na teyże ſamey ſą zbudowane podſtawie, a dwie ich ściany, na iedney płaſzczyznie znayduiace ſię, ſtoią na tymże ſamym boku podſtawy.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE. i ACLI. zbudowane na teyże ſamey podſtawie AC; i niech dwie ich ściany, AG, AL, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie; te dwa Równoległościany, ſą równe w bryłowatości. *Tab. III Fig. 3*

Dowodz. Dwie Bryły: A D I E H M, BCKFGL, maią takie wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie, iż iedne do drugich przyſtać mogą; wſzyſtkie podobnie kąty ... ich

ich bryłowe przyſtać mogą do ſiebie. Jakoż Tróykąt HAM, może przyſtać do Tróykąta GBL, a wſzczegulności kąty HAM, GBL, ſą równe. Równoległobok HADE przyſtać może do Równoległoboku GBCF ſobie przeciwnego, w pierwſzym Równoległościanie, a wſzczegulności kąty: HAD, GBC, ſą równe; Równoległoboki także: MADI, LBCK przeciwne ſobie, w drugim Równoległoscianie, mogą do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności kąty: MAD. LBC, ſą równe, więc kąty bryłowe A.B, i ściany tych kątów mogą przyſtać do ſiebie. Toż mowić i o wſzyſtkich innych kątach bryłowych, i o wſzyſtkich innych, tych dwóch Brył, ścianach. Zaczym te dwie Bryły przyſtać mogą do ſiebie. i ſą równe ſobie w bryłowatości. Aże od całey Bryły ACLE odiąwſzy pierwſzą z Brył wyżey wyrażonych, ADIEHM, zoſtaie ſię Równoległościan ACLI a odiąwſzy od teyże całey Bryły ACLE, drugą Bryłę BCKFGL, zoſtaie ſię Równoległościan ACGE; więc te dwa Równoległościany ſą rowne. (f)

76.

(f) *To dowodzenie ieſt ogulne, i rozciąga ſię do iakiegożkolwiek położenia linii MI; czyliby punkt M przypadał na punkt*

76. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany są równe w bryłowatości, gdy iednaką maią wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, chociaż żadna z ich ścian stoiących na bokach podstawy, nie będzie na teyże samey płaszczyznie.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, i ACI i, na teyże samey podstawie AC, z iednaką wysokością; i niech inne ich ściany na odmiennych znayduią się płaszczyznach; te dwa Równoległościany są równe. *Tab. III Fig. 4.*

Dowodz. Przedłużmy liniie KI, HE tak daleko, aż się zniydą z sobą w punkcie O. Niech ieszcze i liniia LM, przedłużona, przecina HE, w N; a liniia GF także przedłużona niech przecina IK w P i niech Q będzie punktem przecięcia liniy GF, LM, albo ich przedłużeń.

Pociągniymy liniie AN, DO, BQ, CP.

Bryła ACQO, będzie Równoległościanem, czego bardzo łatwo dowieść można.

H Ró-

G, czyliby się znaydował między G i H, czyli nakoniec byłby na linii IiG przedłużoney.

Równoległościan ACQO. ma tę fame co tamte dwa, podftawę AC.

Ma ścianę AO na płaszczyznie ściany AE. należącey do Równoległościanu, ACGE. więc temu Równoległościanowi będzie równy.

Ma zaś oprócz tego ścianę AQ na płaszczyznie ściany AL, należącey do Równoległościanu ACLI, więc będzie równy i temu drugiemu Równoległościanowi.

Więc Rownoległościan ACQO równy ieft tak Równoległościanow ACGE. iako i Równoległościanowi ACLI; a zatym i te dwa Równoległościany fą też fobie równe,

77 *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany fą równe, gdy iednaką maią wyfokość i równe podftawy, z iednym fpolnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże famym boku fpolnym wyftawione, znayduią fię na teyże famey płaszczyznie.

Tb. III Fig. 5. Niech bedą dwa Równoległościany: ACGE. ICOQ iednakiey wyfokości; a podftawy ich równe AC, IC, niech maią

bok

bok ſpolny CD, na którym wyſtawione ſą dwie ściany DF, DF na teyże ſamey płaſzczyznie znayduiące ſię, te dwa Równoległościany ſą równe.

Wykreśl. Przez punkta I, i L, poprowadźmy na płaſzczyznie AG, czyli AO, liniie JN, LM, równoodległe od AH, albo BG, i niech te równoodległe ſpotykaią w N i M, liniię HO. Pociągniymy i liniie EN, FM. Bryła JCME będzie też Równoległościanem.

Dowodz: Równoległościan: ICME, ma też ſame podſtawę JC, i tę ſame wyſokość, co i Równoległościan JCOQ, a zatym ſą ſobie równe.

Tenże Równoległościan JCME, i Równoległościan ACGE, uważaiąc w nich ścianę ſpolną DF, iak podſtawę, maią też iednaką wyſokość, a zatym ſą ſobie równe. Więc Równoległościan JCME, równy ieſt tak iednemu, iak i drugiemu Równoległościanowi ACGE, i JCOQ, a zatym i te dwa Równoległościany ſą równe.

78. *Twierdz:* 6. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy maią iednaką wyſokość, *Tab. III Fig.* 5

Ha igdy

gdy ich podſtawy maiące bok ieden ſpolny, ſą równe.

Niech we dwóch Równoległościanach iednakiey wyſokości będą dwie podſtawy: AC, i IC równe, i maiące ſpolny bok CD; te dwa Równoległościany będą równe.

Wykreśl. Na podſtawie IC, iednego z tych Równoległościanów, który nazwiemy pierwſzym, poſtawmy trzeci Równoległościan teyże ſamey wyſokości, tak, aby ściana iego ſtoiąca na boku CD, znaydowała ſię na płaſzczyznie ściany drugiego Równoległościanu, ſtoiącey na tymże boku;

Ten trzeci Równoległościan, iako maiący z pierwſzym ſpolną podſtawę i wyſokość, będzie mu równy. Tenże trzeci Równoległościan, będzie równy, i drugiemu; bo maią równe podſtawy: IC, AC, z ſpolnym bokiem CD, i ściany ich ſtoiące na boku CD, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Więc ten trzeci Równoległościan równy ieſt tak pierwſzemu iak i drugiemu, a zatym i one ſobie równe będą.

Wſzcze-

Wſzczegulności. Równoległościan każdy równy ieſt Równoległościanowi proſtokątnemu, który ma tę ſamę, co i tamten wyſokość, podſtawę równą podſtawie iego, i bok ieden ſpolny obydwom podſtawom.

79. Zkąd wynika, że cokolwiek ſię powiedziało o Równoległościanach proſtokątnych, wſzyſtko to do iakichkolwiek innych można przyſtoſować; kładąc zamiaſt każdego z nich, Równoległościan proſtokątny, teyże ſamey wyſokości, i podſtawy równey, a maiącey bok ieden ſpolny z podſtawami Równoległościanów nie proſtokątnych. I tak.

1. Dwa Równoległościany, maiące rowne podſtawy i wyſokości, ſą równe; bo Równoległościany proſtokątne iednakiey wyſokości, i maiące ztamtemi Równoległościanami równe podſtawy, a w nich ſpolny bok ieden, ſą równe.

2. Dwa Równoległościany ſą też równe, których podſtawy ſą w ſtoſunku odwrótnym, ich wyſokości.

3. Dwa Równoległościany, których bryłowatości ſą równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrótnym ich wyſokości.

4. Wszyſtko to, co ſię powiedziało o zamienianiu ſtoſunku dwoch Równoległościanów proſtokątnych, na ſtoſunek czworo linii; i o mierze liczebney dwóch Równoległościanów proſtokątnych, przyſtoſować można do miary Równoległościanów nie proſtokątnych; używaiąc do tego, boku iednego podſtawy, wyſokości iey względem tego boku, i wyſokości Równoległościanu.

80. *Przeſtroga.* Gdyby ściſłe i prawdziwe Geometryczne dowodzenie wyżey połoźone przytrudnym ſię zdawało uczniom do poięcia, mimo wyſtawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papieru wyrobionych; można im to będzie łatwiey do poięcia podać w ſpoſob naſtępuiący.

Niechay dwa Równoległościany z równemi podſtawami i wyſokościami ſtoią na teyże ſamey płaſzczyznie. Niech inna iakakolwiek płaſzczyzna równoodległa od pierwſzey, przecina te dwa Równoległościany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podſtawom, a zatym i ſobie równe będą; i gdziekolwiek te dwa Równoległościany przetniemy przez płaſzczyznę równoodległą od ich pod-

podſtaw, równe zawſze będą te przecięcia. Zadney więc niemaſz przyczyny, dla ktoreyby ieden z tych Równoległościanow nie miał być równym drugiemu.

Trzeba tu iednak oſtrzedz zaraz uczniów, iż tym ſpoſobem, ſłabo ſię w rzeczy ſamey dowodzi równość dwóch Równoległościanow. Bo chociażby iak naywięcey było tych przecięć równoodległych od podſtaw Równoległościanow, to ieſt: chociażby iak naymnieyſza była odległość każdego z tych przecięcia, od drugiego naybliżſzego, wſzelako części Równoległościanów zawarte między takiemi dwoma przecięciami, ſą ieſzcze Równoległościanami, które tak ſię względem ſiebie maią, iak ſię maią całe Równoległościany, których tamte ſą częściami. Aby więc wnieść można równość Równoległościanow, z równości ich części, trzebaby pierwey dowieść równości tych części.

Może ſię imaginacya naſza tak daleko zapuścić, że przez nię wyſtawiemy ſobie dwoch Równoległościanów przecięcia tak bliſki iedne od drugich, iż części między niemi zawarte będą ſię zdawać

wać nic różnić od podftaw tychże Równoległościanów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem że małość lub wielkość iakiey rzeczy, nie ieft w fobie małością lub wielkością ale fię albo za małość bierze względem inney rzeczy więkfzey, albo za wielkość, względem inney mnieyfzey; i nie można nigdy Bryły choć by też nayciehfzey za iedno brać z powierzchniami, które ią kończą. Prawda to ieft, że im więkfza będzie liczba przecięciów, dwóch Równoległościanów przez płafzczyzny równoodległe od ich podftaw, tym mnieyfza będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiema naybliżfzemi płafzczyznami, czyli przecięciami; ale znowu, ieżeli iakakolwiek ieft choćby też naymnieyfza, ta różnica, tedy wielokroć powtorżona może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległościanach, których równości chcemy dowodzić, z równości z ich cząftek, czyli z małych Równoległościanów, z których fię fkładaią.

Ta fama trudność do rozwiązania zoftaie, gdyby kto równości dwóch Równoległościanów maiących iednaką podftawę

ſtawę i wyſokość, a z których ieden byłby naprzykład proſty, a drugi nie, chciał dowodzić z podnoſzenia ſię w górę ich podſtaw w rowney zawſze od pierwſzego położenia odległości; ponieważ pierwey dowieść trzebaby, że mieyſca od podſtaw przebyte, nie podług tey drogi brane być powinny, którą w ſamey rzeczy punkt każdy tych podſtaw przebył; (bo do iednakiey wyſokości poſtępuiąc, więcey mieyſca przeydzie punkt nap: ſkrayny Równoległościanu ukośnego, niż tego, który ieſt proſty) ale to mieyſce od podſtaw Równoległościanów przebyte, powinno ſię wymierzać wzdłuż linii proſtopadłey do teyże podſtawy, ponieważ ta tylko liniia mierzy odległość, w którey podſtawa podnoſzeniem ſię ſwoim oddaliła ſię od pierwſzego ſwego położenia.

Naſtępuiące porównywanie może iakożkolwiek ſłużyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znoſi cale.

Gdy dwa Równoległoboki zrobione na teyże ſamey podſtawie, i z równą wyſokością, przetniemy liniią równoodległą od podſtawy, obadwa przecięcia równe będą podſtawie. Wſzyſtkie też inne

ne takowe przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równe, i tyleby ich było w iednym, co i w drugim Równoległoboku. Toż mówić i o dwoch Tróykątach, których przecięcia równoodległe od podſtawy ſpolney, byłyby także równe. Dlaczegoż więc te dwa całe Równoległoboki, lub Tróykąty nie miałyby ſobie być równe? Podobnież tedy tym ſpoſobem dochodziemy względem powierzchni płaſkich, tey ſamey prawdy, ktorey doſzliśmy ściſłym pierwey dowodzeniem; iuż ten ſam ſkutek, powinien nas wątpliwości pozbawić, którąbyśmy mieć mogli w używaniu tego ſpoſobu. Można zatym przyſtoſować go i do Brył dla teyże przyczyny.

Obiaśni ſię to lepiey i potym, gdy mówić będziemy o ſpoſobie *wyczerpania* (de methodo exhauſtionis.)

81. *Twierdzenie* 7. W iakimkolwiek Równoległościanie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iedney z ścian iego przecięgnąwſzy płaſzczyznę; przecięcie Równoległościanu przez tę płaſzczyznę, będzie Równoległobokiem, i podzieli Równoległościan na dwie części, które przyſtać do ſiebie mogą.

Niech

Niech będzie Równoległościan ACGE; *Tab: III Fig. 1.* przez krawędź AH, i przez przekątną HF niech przechodzi płaszczyzna; linie AH, CF są równoodległe, a płaszczyzna, która przechodzi przez AH, HF, przechodzi też i przez CF. Ze zaś linie: AH, CF są równe, i równoodległe, więc Czworokąt ACFH, iest oraz i Równoległobokiem.

Dwie Bryły: ABCFGH, FEHACD, mogą przystać do siebie.

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *Równoległoboczne* (Parallelogrammicæ) są ścianami przeciwnemi w Równoległościanie; ściany zaś ich Troykątne iak nap: ADC, HEF, maią równe boki iedne względem drugich.

2: Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przystać iedne do drugich; nap: kąt bryłowy w A iedney Bryły, robi się z trzech kątów płaskich: CAB, BAH, HAC, które równe są względem kątów EFH, EFC, HFC, z których się robi kąt bryłowy w F, drugiey Bryły.

Więc te dwie Bryły mogą przystać do siebie, a wszczegulności są sobie równe.

ROZD:

ROZDZIAŁ V.

O Graniastosłupach.

82. *Twierdz: przybrane.* Niech będą dwie prostokreślne Figury równe i podobne, wykreślone na dwóch równoodległych płaszczyznach; niech jeszcze i boki ich równe, będą równoodległe iedne względem drugich; Czworokąty, których bokami przeciwnemi, będą boki równe tych Figur, są Równoległobokami.

Dowodz: We wszystkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwne są równe, i równoodległe; a zatym i inne boki są też równe i równoodległe.

83. *Defin:* Niech będzie Bryła iaka zakończona dwiema Figurami prostokreślnemi, równemi, podobnemi i równoodległemi a maiącemi wszystkie boki, iedne względem drugich równoodległe, i tylą Równoległobokami maiącemi za boki, boki przeciwne tamtych dwóch Figur, ile każda z tych Figur ma boków, ta Bryła nazywa się *Graniastosłupem* (Prisma). I tak Równoległościany, o których w poprzedzaiących Rozdziałach

mówi-

mówiliśmy, ſą pewnemi Graniaſtoſłupów gatunkami. Jedna z tych Figur równych i równoodległych, na którey wyſtawiamy ſobie, iakoby zbudowany Graniaſtoſłup nazywa ſię iego *podſtawą*, a proſtopadła ſpuſzczona na tę podſtawę, z punktu iakiegokolwiek ściany przeciwney nazywa ſię *wyſokością* tego Graniaſtoſłupa. Graniaſtoſłup albo ieſt *proſty*, albo *ukośny*; *proſty*, gdy ściany iego ſtoią do pionu względem podſtawy; *ukośny*, gdy też ściany ſą do podſtawy nachylone.

Różne także nazwiſka przybiera Graniaſtoſłup, podług rozmaitey liczby boków podſtawy ſwoiey, albo podług wielości ścian pobocznych. Nazywa ſię *trójkątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *ſześciokątnym*, gdy podſtawa iego ieſt Trójkątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

84. *Twierdz.* 1. Przeciąwſzy gdziekolwiek Graniaſtoſłup płaſzczyzną równoodległą od iego Podſtawy, przecięcie to będzie Figurą równą i podobną podſtawie.

Dowodz. Przecięcie iedney któreykolwiek ściany poboczney, przez tę płaſzczy-

ſzczyznę, równoodległym będzie od tego boku podſtawy, na którym ta ściana ſtoi; i tedwie linije będą bokami przeciwnemi Równoległoboku, który za dwa inne boki, ma częsci dwóch innych boków teyże ściany, zawarte między podſtawą i płaſzczyzną przecinaiącą; więc te dwie linije będą równe.

Przecięcia więc przez tę płaſzczyznę dwóch ścian przyległych, będą równoodległe względem boków ſobie przeciwnych, należących do podſtawy, a zatym kąt, który te ſpolne przecięcia zrobią, równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podſtawy.

Będzie tedy mieć przecięcie Graniaſtoſtupa przez tę płaſzczyznę, wſzyſtkie ſwoie boki i wſzyſtkie kąty równe względem boków i kątów podſtawy Graniaſtoſtupa, i dla tego przecięcie to przyſtać może do podſtawy.

85. Można ſobie wyſtawić Graniaſtoſtup, iakoby zrobiony przez poſuwanie ſię w gorę iego podſtawy, w ſpoſob naſtępuiący:

Niech będzie Figura iaka proſtokreślna, odrysowana na płaſzczyznie. Od wierz-

wierzchołku kąta ktoregokolwiek tey Figury, wyciągniymy linią prostą czyniącą iakikolwiek kąt z tą płaszczyzną. Niech się potym wznosi do gory ta Figura, w równey zawsze od siebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy nieschodzi z linii od niego wyprowadzoney; Bryła która się takim ruchem utworzy, będzie Graniastosłupem.

86. *Twierdz.* 2. Graniastosłup tróykątny, iest połowa Równoległościanu takiego, któryby za podstawę miał Rownoległobok dwa razy większy od podstawy tego Graniastosłupa, z dwoma bokami rownaiącemi się bokom podstawy tegoż Graniastosłupa tróykątnego.

Niech będzie Graniastosłup tróykątny ABCDEF, którego podstawa iest Tróykąt ABC. Dokończmy Równoległoboku ABCG, którego dwoma bokami są AB, BC; na tym Równoległoboku dokończmy Równoległościanu ACGH, któryby miał społne dwie ściany AE, i BD z Graniastosłupem tróykątnym. *Tab. IV. Fig. 1.*

Dwa Graniastosłupy Tróykątne ABCDEF, DHFAGC, mogą do siebie przystać, bo są dwiema częściami całego Równo-

na

mi przez płaszczyznę przekątną ACDF; a zatym ieden z nich, nap: Graniastosłup ABCDEF, iest połową Równoległościanu ACEH,

87 *Wniosek*. Cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach względem ich wielkości, wszystko to przystosować można do Graniastosłupów troykątnych, które tych Rownoległościanow są połowami.

1. Dwa Graniastosłupy troykątne, rowney wysokości i podstawy, równaią się i w bryłowatości.

2. Dwa Graniastosłupy troykątne, których podstawy są rowne, maią się do siebie, iak ich wysokości.

3. Dwa Graniastosłupy troykatne iednakiey wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.

4. Dwa Graniastosłupy troykątne, których podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości, równaią się sobie w bryłowatości.

5. Dwa Graniastosłupy troykątne, rowne w bryłowatości, maią podstawy w sto...nku odwrótnym ich wysokości.

6. Co

6. Co ſię powiedziało o porownywaniu liczebnym dwòch Ròwnoległościanòw, to twierdzić można i o porownywaniu dwòch Graniaſtosłupòw tròykątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowatości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podſtawy Graniaſtoſłupa tròykątnego, przez liczbę znaczącą wielkość iego wyſokości.

7. Maiąc wiadomą podſtawę Graniaſtosłupa tròykątnego, i kąty dwoch ścian iego, ktòre z kątem podſtawy czyni. ieden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniaſtosłup tròykątny, i iego wyſokość, a zatym i bryłowatość tymże ſamym ſpoſobem, iak ſię czyniło względem Ròwnoległościanòw.

8. Graniaſtosłupy tròykątne, maiące ſpòlny kąt ieden bryłowy, ſą do ſiebie iak Ròwnoległościany proſtokątne, maiące te ſame trzy krawędzie; w rachunku zaś tak ſą do ſiebie, iak liczby trzy ciągło iedna przez drugą rozmnożone, wyrażaiące wielkość tych trzech krawędzi.

88. *Twierdz:* 3. Graniaſtosłup nie tròykątny może być rozłożony na Gra-

niaſtosłupy tròykątne teyże co on wyſokości; za podſtawy zaś maiące Tròykąty, na ktòre rozdzielona ieſt iego podſtawa przez tyle przekątnych ciągnionych od iednego tey podſtawy wierzchołka do innych, ile ich poprowadzić można.

Niech będzie ABCDE, podſtawa nap: pięciokątna Graniaſtosłupa ABCDE edcba. Od iey wierzchołka nap: A poprowadźmy przekątne: AD, AC, te rozdzielą Podſtawę na trzy Tròykąty: AED, ADC, ACB. Na ścianie przeciwney podſtawie, od punktu *a*, odpowiadaiącego punktowi A, poprowadźmy przekątne: ad, ac.

Tab. IV. Fig. 2

Liniie Aa, Dd, ſą obiedwie ròwnoodległe od linii Ee, i oney ròwne; więc i względem ſiebie będą ròwnoodległemi i ròwnemi; a przeto Czworokąt ADda, ieſt Ròwnoległobokiem, a zatym Bryła ADE eda, ieſt Graniaſtosłupem tròykątnym. Tymże ſpoſobem okazuie ſię, że i Bryły: ACDdca, ACBbca, ſą Graniaſtosłupami tròykątnemi.

89. *Twierdz:* 4. Dwa iakiekolwiek Graniaſtosłupy maiące ròwną wyſokość, tak ſię do ſiebie maią, iak ich podſtawy.

Jakoż

Jakoż Graniastosłupy ADE eda, ADC cda, ACB bca, i t. d. maią się do siebie iak ich podstawy; ADE, ACD, ABC; więc ieden z nich, nap: Graniastosłup: ADE eda, tak się ma do summy wszystkich, to iest, do Graniastosłupa pięciokątnego, iak podstawa tròykątna pierwszego, do summy podstaw wszystkich, to iest, do podstawy Graniastosłupa pięciokątnego.

Podobnie też i każdy inny Graniastosłup iednakiey wysokości, takby się miał do Graniastosłupa tròykątnego: ADEeda, iak podstawa iego do podstawy tròykątney ADE.

Więc (złożywszy stosunki) będzie stosunek iakiegokolwiek Graniastosłupa do Graniastosłupa ABCDE cdeba, ròwny stosunkowi podstawy pierwszego Graniastosłupa, do podstawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wysokości tych dwòch Graniastosłupòw są ròwne.)

Wszczegulności zaś, gdy Ròwnoległościan i Graniastosłup iakikolwek ròwne mieć będą podstawy i wysokości; bryłowatość iednego, ròwna będzie bryłowatości drugiego.

A zatym cokolwiek się o Ròwnoległościanach powiedziało, można to i do

 Gra-

Graniaſtosłupów iakichkolwiek przyſtoſować, co do wielkości ich, ile te zawiſły od ich podſtaw i wyſokości. Można przeto do iakichkolwiek Graniaſtoſłupów przyſtoſować wnioſki, co do Graniaſtosłupów tròykątnych wſzczegulności, które po Twierdzeniu 2gim tego Rozdziału naſtępuią.

ROZDZIAŁ VI.

O Piramidach albo Ostroſłupach.

90. DEfin: Niech punkt iaki znayduie ſię nad płaſzczyzną Figury iakieykolwiek proſtokreślney; przez ten punkt i przez wſzyſtkie boki Figury, niechay przechodzą płaſzczyzny; zrobi ſię ztąd Bryła kończąca ſię z iedney ſtrony na tey Figurze, a z innych ſtron, na tylu Tròykątach maiących ſpolny wierzchołek w owym punkcie, ile ta Figura ma boków. Bryła ta nazywa ſię *Oſtroſłupem* (Pyramis.) Powierzchnią Oſtrosłupa można ſobie wyſtawić iakoby zrobioną ruchem nici przywiązaney iednym końcem do punktu znayduiącego ſię nad płaſzczyzną Figury, a drugim końcem wyciągnionym obracaiącey ſię około obwodu teyże Figury. Figura proſtokreslna,

ślna, którey boki służą za podstawy Tròykątów kończących Ostrosłup, nazywa się *podstawa* ostrosłupa, te Tròykąty nazywają się iego *ścianami*; punkt który iest wierzchołkiem spolnym wszystkich ścian Ostrosłupa, nazywa się *wierzchołkiem* iego. Prostopadła spuszczona od tego wierzchołka, na płaszczyznę podstawy, zowie się *wysokością* Ostrosłupa.

Ostrosłup rożne przybiera nazwiska, podług wielkości bokòw podstawy swoiey. Nazywa się tròykątnym, czworokątnym, pięciąkątnym, sześciokątnym i t. d. gdy podstawa iego iest Tròykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

Ten Ostrosłup nazywać będziemy *prostym*, którego podstawą iest Figura prostokreślna mogąca się na kole opisać; i gdy prostopadłey spuszczoney od wierzchołka tego Ostrosłupa, drugi koniec przypada na środek tego koła.

W takim Ostrosłupie wysokość wszystkich ścian iest iednakowa, i tych ścian płaszczyzny równie są nachylone do płaszczyzny podstawy.

W Ostrosłupie, ktòrego podstawą iest Figura prostokreślna mogąca się wpisać

w koło

w koło, a którego wyſokość wychodzi od środka, tego koła, wſzyſtkie krawędzie ścian ſą równe, a zatym wſzyſtkie te ściany ſą Tròykątami równoramiennemi. Ale że środek koła opiſanego na podſtawie, może czaſem za tę podſtawę wychodzić, dla tego, takowego Oſtroſłupa nie można nazywać proſtym.

Zeby iednak nazwiſko to Oſtroſłupa proſtego (źle do tych czas zwyczaynie określone) ogulnieyſzym uczynić, przydamy naſtępuiący warunek.

Gdy w Figurze proſtokreślney, znayduie ſię taki punkt, przez który ciągnione liniie, a po obydwòch ſtronach na obwodzie Figury zakończone, dzielą ſię w tym punkcie na dwie równe części, ten punkt nazywa ſię środkiem Figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w Równoległoboku, ieſt tego Rownoległoboku środkiem. Jeżeli tedy Figura proſtokreślna maiąca taki środek, ſłuży za podſtawę Oſtroſłupowi, i ieżeli proſtopadła od wierzchołku iego ſpuſzczona przypada na ten środek Figury, taki Oſtrosłup nazwiemy proſtym.

Oſtro-

Ostrosłup nazywa się *foremnym*, gdy za podstawę ma Figurę prostokreślną foremną.

91. *Twierdz:* 1. Przeciąwszy Ostrosłup płaszczyzną rownoodległą od podstawy iego, przecięcie to będzie Figurą podobną do podstawy.

Niech będzie Ostrosłup SABCDE, maiący wierzchołek w punkcie S, a którego podstawa iest Figura prostokreślna ABCDE. Niech ten Ostrosłup przecina płaszczyzna rownoodległa od podstawy, przecięcie to abcde będzie podobne do podstawy. *Tab: IV Fig: 3*

Ponieważ płaszczyzna podstawy równoodległa iest od płaszczyzny przecinaiącey; będą też i przecięcia ścian, spólne z temi płaszczyznami, równoodległe iedne względem drugich; więc wszystkie boki przecięcia nap. ab, bc równoodległe będą względem boków AB, BC podstawy; a zatym i wszystkie kąty przecięcia, równe będą względem kątów podstawy, nap: kąt abc, równy będzie kątowi ABC. Iest tedy przecięcie równokątne z podstawą.

Troykąty SAB, sab są podobne, więc Sb: SB = ab: AB.

Troy-

Tròykąty też, Sbc. SBC podobne; więc: Sb: SB=bc: BC; a zatym ab: AB=bc: BC.

Więc przecięcie, i podſtawa, maią około kątów względem ſiebie równych, boki proporcyonalne, a zatym przecięcie podobne ieſt do podſtawy.

W ſzczegulności zaś, przecięcie takie, i podſtawa, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym boków ich, odpowiadaiących ſobie; albo ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym liniy nap: Sb, SB; albo nakoniec w ſtoſunku dwumnożnym ich odległości od wierzchołka S, Oſtroſłupa, maiącey ſię wymierzać przez proſtopadłą ſpuſzczoną od tego wierzchołka, do ich płaſzczyzn; tak dalece, że przeciąwſzy Oſtroſłup płaſzczyznami równoodległemi od podſtawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby te miały ſię do ſiebie, iak liczby 1,2,3,4,5, i t. d: powierzchnie tych przecięciów będą do ſiebie iak liczby 1,4,9,16,25, i t. d. (Obacz Geometryi Części I. Rozdz. IX.)

Uwaga. Tego Podania częſte ieſt w Fizyce używanie; i dla tego trzeba ie iak nayiaśniey uczniom wyłożyć, i o gruntownym iego zrozumieniu od nich być przeświadczonym.

92. *Wnio-*

92. *Wniosek* 1. Niech będą dwa Ostrosłupy z iednakową wysokością, i zrównemi podstawami znayduiącemi się na teyże samey płaszczyznie, i po iedney stronie tey płaszczyzny. Gdy te Ostrosłupy przetniemy płaszczyznami rownoodległemi od ich podstaw, przecięcia odpowiadaiące sobie, tak się mieć do siebie będą, iak podstawy tych Ostrosłupów; a w szczegulności, gdy te podstawy rowne będą, wszystkie też przecięcia iednego Ostrosłupa będą rowne przecięciom odpowiadaiącym drugiego.

93. *Wniosek* 2. Z tego co się powiedziało o rowności Graniastosłupów maiących iednaką wysokość i rowne podstawy, a stoiących na teyże samey płaszczyznie, iako też i o proporcyonalności tych Graniastosłupów z ich podstawami, gdy te przy rownych wysokościach, są nierowne; możnaby mniemać, że też i Ostrosłupy maiące rowne wysokości, i podstawy, są rowne, i że gdy rowne maią wysokości, będą do siebie iak ich podstawy.

Następuiące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczemy.

94.

94. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Ostrostup Tròykątny przecięty płaszczyznami rownoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Na podstawie, i na każdym przecięciu wystawmy ku wierzchołkowi Ostrostupa, Graniastosłupy z których każdy miałby wysokość rowną odległości dwòch płaszczyn nayblizszych. Na tychże przecięciach, wystawmy znowu inne Graniastosłupy ku podstawie, z tą samą, co pierwsze, wysokością. Niech każdy z tych Graniastosłupòw ma iednę krawędź spolną z Ostrostupem, i dwie ściany na tychże płaszczyznach co i dwie krawędzie Ostrostupa. Rożnica summy wszystkich pierwszych Graniostosłupów (ktòre nazwę opisanemi) od summy drugich (ktòre nazwę wpisanemi) rowna będzie pierwszemu Graniastosłupowi, ktòry iest wystawiony na podstawie Ostrostupa.

Tab. I. V. Fig. 4. Nich będzie Ostrostup tròykątny SABC, ktorego wiezchołek S, a podstawa ABC.

Podzielmy ten Ostrostup na części nap: 5, płaszczyznami rownoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Niech będą: $A^1B^1C^1$. $A^2B^2C^2$ $A^3B^3C^3$ $A^4B^4C^4$ przecięcia Ostrostupa, przez

przez te płaszczyny. Na podstawie i na wszystkich przecięciach Ostrosłupa wystawmy ku iego wierzchołkowi Graniastosłupy, kończące się na przecięciu nayblizszym; te będą opisanemi na Ostrosłupie, bo ich ściany występować będą za ściany Ostrosłupa. Wystawmy znowu na tychże przecięciach ku podstawie, inne Graniastosłupy teyże samey co pierwsze wysokości; te będą wpisanemi w Ostrosłup, bo za ściany ich, będą wychodzić ściany Ostrosłupa. Rożnica między summą pierwszych i drugich Graniastosłupów, równać się będzie Graniastosłupowi opisanemu, wystawionemu na podstawie Ostrosłupa.

Wykreśl: Podzielmy linie AB, AC, na 5 równych części. w punkach: b^1, b^2, b^3, b^4; c^1, c^2, c^3, c^4. i pociągniymy linie; $b^1c^1, b^2c^2, b^3c^3, b^4c^4$.

Tróykąty: Ab^1c^1; Ab^2c^2, Ab^3c^3, Ab^4c^4, będą równe względem Ostrosłupa przecięciów: $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, $A^4B^4C^4$.

Różnica między Graniastosłupem opisanym a stoiącym na podstawie ABC, i między Graniastosłupem wpisanym a sto-

iącym

iącym na podſtawie $A^1B^1C^1$ równa ſię Graniaſtoſłupowi teyże ſamey co tamte wyſokości, maiącemu za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt BCc^1b^1.

Podobnie i różnica między Graniaſtoſłupem opiſanym, a ſtoiącym na przecięciu $A^1B^1C^1$, i między Graniaſtoſłupem wpiſanym a ſtoiącym na przecięciu $A^2B^2C^2$ równa ſię Graniaſtoſłupowi, teyże ſamey co one wyſokości, maiącemu za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt $b^1c^1b^2c^2$.

Także różnice dwóch par Graniaſtoſłupów naſtępuiących, równe ſą Graniaſtoſłupom, teyże co one wyſokości maiącym za podſtawy Cworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3\,b^4c^4$.

Oſtantni zaś Graniaſtoſłup opiſany, rowna ſię Graniaſtoſłupowi, teyże co on wyſokosci, maiącemu za podſtawę Tróykąt Ab^4c^4.

Różnica tedy między ſummą wſzyſtkich Graniaſtoſłupów opiſanych, a ſummą wſzyſtkich Graniſtoſłupów wpiſanych, równa będzie ſummie wſyſtkich Graniaſtoſłupów teyże co one wyſokości, któreby ſtały

ſtały na Czworokątach BCc'b', b'c'c²b², b²c²c³b³, b³c³c⁴b⁴, i na Tròykącie Ab⁴c⁴, to ieſt: ròwna będzie Graniaſtoſłupowi tròykątnemu teyże co one wyſokości, a maiącemu za podſtawę Tròykąt ABC. Ta więc ròżnica ròwna ſię w ſamey rzeczy pierwſzemu Graniaſtoſłupowi opiſanemu.

95. *Wniosek.* Pierwſzy ten Graniáſtoſłup opiſany na Oſtroſłupie SABC, ktòrego podſtawa ABC nie odmienia ſię, będzie tym mnieyſzy, im mnieyſzą damy mu wyſokość, to ieſt, im liczba przecięć Oſtroſłupa będzie większa. Można zaś uczynić ten Graniaſtoſłup mnieyſzym od iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa naznaczonego, zamieniaiąc ten oſtatni Graniaſtoſłup na inny, ktòryby miał za podſtawę Tròykąt ABC, i dzieląc wyſokość iednoſtayną Oſtroſłupa, na tyle części, aby każda z nich była mnieyſza od wyſokości tego Graniaſtoſłupa tak przerobionego.

Maiąc więc dany Oſtroſłup, można weń wpiſać, i opiſać na nim ſpoſobem wyżey wyrażonym, tyle Graniaſtoſłupòw, aby ròżnica dwòch ſumm, mnieyſza była od iakiegokolwiek Graniaſtosłupa na

znaczo-

znaczonego, a tym bardziey, aby rożnica Ostrosłupa od iedney z tych summ mnieyſza była od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego.

96. *Twierdz.* 2. Dwa Ostrosłupy maiące rowne wyſokości i podstawy, są rowne.

Gdyby te dwa Ostrosłupy nie były rowne, tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniemana ich rożnica zamieniona była na Graniastosłup maiący rowną z temi Ostrosłupami podstawę. Podzielmy wyſokość iednego z tych Ostrosłupa na tyle części rownych, aby każda z nich mnieyſza była od wyſokości tego Graniastosłupa. Wpiſzmy w ten Ostrosłup i opiſzmy na nim Graniastosłupy ſpoſobem wyrażonym w poprzedzaiącym Twierdzeniu przybranym. Toż uczyńmy i na drugim Ostrosłupie; wſzystkie Graniastosłupy wpiſane, i opiſane, na tych dwoch Ostrosłupach, będą rowne iedne względem drugich (87, 88) a zatym ſumma Graniastosłupow wpiſanych nap: w ieden Ostrosłup będzie rowna ſummie Graniastosłupow wpiſanych w drugi Ostrosłup. Że zaś zrobiliśmy rożnicę dwoch ſumm Gra-

Graniaſtoſłupòw wpiſanych i opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, mnieyſzą od różnicy mniemaney dwòch Oſtrosłupów, więc tym bardziey różnica tego Oſtroſłupa od ſummy wſzyſtkich Graniaſtoſłupòw weń wpiſanych, mnieyſza będzie, od ròznicy mniemaney tych dwòch Oſtroſłupôw; a zatym i ròżnica pierwſzego Oſtroſłupa, od ſummy Graniaſtoſłupòw wpiſanych w drugi Oſtroſłup, mnieyſza będzie, niż ròżnica pierwſzego Oſtroſłupa od drugiego. Summa tedy Graniaſtoſłupòw wpiſanych w ten drugi Oſtroſłup, byłaby więkſza od tego drugiego Oſtroſłupa, co być nie może; a przeto te dwa Oſtroſłupy nie mogą ſobie być nieròwne.

97. *Twierdz:* 3. Graniaſtoſłup tròykątny, może zawſze być rozłożony na trzy Oſtroſłupy tròykątne ròwne, z ktòrych dwa mieć będą tę ſamę podſtawę i wyſokość, co i Graniaſtoſłup.

Niech będzie Graniaſtoſłup tròykątny ABCEF, można go rozłożyć na trzy Oſtroſłupy tròykątne ròwne, z ktòrych dwa, tę ſamę, co on mieć będą podſtawę i wyſokość. *Tab. IV Fig.* 5

Przez bok AC, podſtawy ABC. Graniaſtoſłupa, i przez koniec F, krawędzi

jego

tego Graniaſtoſłupa nie przechodzącey przez punkta: A i C, przeciągniymy płaſzczyznę ACF; odetnie ona od Graniaſtoſłupa, Oſtroſłup tròykątny FABC. maiący za wierzchołek, punkt F, a za podſtawę, Tròykąt: ABC; a zatym ten Oſtroſłup, tę ſamę co i Graniaſtoſłup mieć będzie, podſtawę i wyſokość.

Podobnie i przez bok EF, ściany przeciwney podſtawie, i przez punkt C przeciągniymy płaſzczyznę ECF; odetnie ona od Graniaſtoſłupa, Oſtroſłup tròykątny: CEDF, maiący za wierzchołek, punkt C, a za podſtawę Tròykąt DEF, rowny Tròykątowi: ABC, a zatym i ten drugi Oſtroſłup ma tę ſamę także co i Graniaſtoſłup, podſtawę i wyſokość.

Więc dwa Oſtroſłupy: FABC, CDEF rowne maią wyſokości, i podſtawy, a zatym ſą rowne (96). Zoſtanie ieſzcze po tych dwòch przecięciach, Oſtroſłup CFEA, zakończony czterema Tròykątami: ACF, ACE, AEF, ECF.

Wyſtawmy ſobie, ten oſtatni Oſtroſłup iako maiący za podſtawę, Tròykąt: nap: ACE, a za wierzchołek, punkt F, Oſtroſłup zaś CEDF, iakoby miał za podſtawę,

Tròy-

Tròykąt: CDE, a za wierzchołek tenże punkt F. Przekątna CE, Równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa Tróykąty, które przystać do siebie mogą; więc te dwa Ostrosłupy maią podstawy równe, ACE, DEC i na iedney płaszczyznie znayduiące się; a oprocz tego, maią spólny wierzchołek w punkcie F, a zatym i wysokość równą; więc są równe; wszystkie tedy trzy Ostrosłupy, na które Graniastosłup był podzielony, są równe.

Wzaiemnie Ostrosłup tróykątny, można zawsze sobie wystawić, iako trzecią część Graniastosłupa maiącego tę samę co i Ostrosłup podstawę, i wysokość.

Niech będzie Ostrosłup tróykątny: ABCF, którego podstawa ABC, a wierzchołek F.

Na teyże podstawie ABC, wystawmy sobie iakoby zbudowany Graniastosłup, ABCDEF, którego dwie ściany ABFE, BCDF znaydowałyby się na tych samych płaszczyznach, na których znayduią się dwie ściany Ostrosłupa, i krawędź im spolna BF. Podług Twierdzenia poprzedzaiącego, ten Graniastosłup iest trzy razy tak wielki, iak Ostrosłup; więc też i ten Ostrosłup iest trzecią częścią tego Graniasto-

 słupa

ſłupa. A że wſzyſtkie Graniaſtoſłupy maiące równe podſtawy i wyſokości, ſą równe; więc Oſtrosłup tróykątny ieſt trzecią częścią Graniaſtoſłupa iakiegokolwiek, maiącego taką ſamę iak on podſtawę i wyſokość.

98. *Twierdz:* 4. Oſtrosłup iakikolwiek ieſt trzecią częścią Graniaſtoſłupa maiącego tę ſamę co on podſtawę, i wyſokość.

Dowodz. Jakażkolwiek będzie podſtawa Oſtrosłupa, poprowadź w niey przekątnych tyle do wſzyſtkich kątów ile można. Przez te wſzyſtkie przekątne, i przez wierzchołek Oſtrosłupa niech przechodzą płaszczyzny; Oſtrosłup będzie przez te płaszczyzny podzielony na tyle Oſtrosłupów tróykątnych, na ile Tróykątów podſtawa była podzielona przez przekątne; każdy z tych Oſtrosłupów tróykątnych, będzie trzecią częścią Graniaſtosłupa maiącego taką ſamę iak on podſtawę, i wyſokość; a zatym ſumma wſzyſtkich tych Oſtrosłupów tróykątnych, to ieſt cały iakikolwiek Oſtrosłup z nich ſię ſkładaiący, równać ſię będzie trzeciey części, ſummy wſzyſtkich tych Graniaſtosłupów, albo co na iedno wychodzi, równać ſię będzie

dzie trzeciey części Graniaſtosłupa maiącego tę ſamę podſtawę i wyſokość, co i Oſtrosłup.

99. *Wnioſki.* Cokolwiek ſię o ſtoſunku Graniaſtosłupów powiedziało, toż mówić można i o ſtoſunku Oſtrosłupów, które, maiąc takie ſame iak i te Graniaſtosłupy, podſtawy, i wyſokości, ſą trzeciemi względem nich częściami.

1. Dwa Oſtrosłupy iakiekolwiek (proſte, lub ukośne foremne, lub nie foremne) z równemi wyſokościami, tak ſię do ſiebie maią, iak ich podſtawy.

2. Dwa Oſtrosłupy z równemi podſtawami, tak ſię do ſiebie maią, iak ich wyſokości,

3. Dwa Oſtrosłupy ſą równe, gdy ich podſtawy ſą w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości.

4. Dwa Oſtrosłupy równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości, i wyraz liczebny bryłowatości Oſtrosłupa będzie znaleziony, gdy ſię weźmie trzecia część dwóch liczb rozmożonych, z których iedna znaczyłaby

 wiel-

wielkość powierzchni podstawy tego Ostrosłupa, a druga, wielkość iego wysokości.

100. *Uwaga*. Maiąc dane w liczbach, sześć krawędzi iakiego Ostrosłupa tróykątnego, można wyznaczyć bryłowatość tego Ostrosłupa.

Jakoż złożywszy Tròykąt z trzech takowych krawędzi, i uważaiąc go iak podstawę Ostrosłapa; a na trzech bokach tey podstawy, zrobiwszy trzy Tròykąty, na teyże samey, co i podstawa płaszczyznie, dawszy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozostałych; te Tróykąty będą ścianami Ostrosłupa. Kąt każdy bryłowy przy podstawie, składać się będzie, z kąta Tròykąta wziętego za podstawę, i z dwòch kątòw ścian dwòch przy podstawie. Ponieważ zaś te kąty są wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podstawy, a wszczegulności będzie można wyrachować stosunek wysokości Ostrosłupa, do spólnego przecięcia tych dwòch ścian. Aże to spòlne przecięcie iest dane co do wielkości, więc doydziemy i wysokości Ostroslupa, a zatym i iego bryłowatości, ktora

która zawisła od wysokości Ostrosłupa, i powierzchni iego podstawy.

101. *Uwaga* 2. Można tę bryłowatość wyznaczyć i bez Trygonometryi, iako się to pokaże w Algebrze.

102. *Uwaga* 3. Gdy Ostrosłup iest foremny, a zatym trzy ściany iego krawędzie są równe; Kwadrat wysokości Ostrosłupa, równa się rożnicy kwadratu iedney krawędzi, od kwadratu promienia koła na podstawie opisanego. A przeto ta wysokość może być bardzo łatwo w liczbach wyznaczona, bez pomocy Trygonometryi. Ten zaś sposob postępowania przystosować można do wszystkich Ostrosłupów foremnych, iakażkolwiek byłaby liczba ich boków w podstawie.

Przykł: 1. Wyznaczyć bryłowatość Bryły nazwaney *Czworościanem* (Tetraedrum.)

Bok ieden Troykąta rownobocznego wyznaczywszy przez liczbę 2, kwadrat wysokości tego Tróykąta wyrazi się przez liczbę 3. Promień koła opisanego iest $\frac{2}{3}$ tey wysokości, więc kwadrat tego

pro-

promienia, ieſt $\frac{4}{9}$, kwadratu wyſokości Tròykąta, a zatym kwadrat tego promienia ieſt $\frac{12}{9}$. Ze zaś kwadrat wyſokości tego Oſtrosłupa ieſt $4 - \frac{12}{9} = \frac{24}{9} = \frac{4 \times 6}{9}$ więc ſama wyſokość będzie $= \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Powierzchnia Tròykąta ſłużącego za podſtawę wyrazi ſię przez $\sqrt{3}$, a zatym bryłowatość Oſtrosłupa będzie wyrażona przez $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; to ieſt bryłowatość Oſtrosłupa tak ſię ma do bryłowatości Sześcianu rownego co do bokow Oſtrosłupowi, iak $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}$ do 12; albo iak 2 do $12\sqrt{2}$, albo iak 1 do $6\sqrt{2}$; albo nakoniec iak 1 do $\sqrt{72}$; ktory to ſtoſunek bliſki ieſt ſtoſunku 2 do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało rożni ſię od ſtoſunku 68 do 577.

Przykł. 2. Wyznaczyć bryłowatość Ośmiościanu foremnego.

Można ſobie Ośmiościan wyſtawić w myśli, iakoby złożony z dwoch Oſtrosłupow proſtych kwadratowych, ſtykaiących ſię z ſobą rownemi podſtawami.

Wyra-

Wyraziwszy bok ieden Ośmiościanu tego, przez 2, kwadrat promienia koła opiſanego na podſtawie iednego z tych dwóch Oſtroſłupów, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wyſokości tego Oſtroſłupa wyraz ſię przez różnicę między kwadratem z 2, to ieſt 4, i 2, to ieſt będzie $= 4 - 2 = 2$. Wyſokość zaś tego Oſtroſłupa wyrazi ſię przez $\sqrt{2}$; więc bryłowatość iednego tego Oſtroſłupa będzie oznaczona przez $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, a zatym bryłowatość Ośmiościanu przez $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Jeſt tedy bryłowatość Ośmiościanu foremnego do bryłowatości Sześcianu równego co do wielkości boków, iak $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2} : 3$, który to ſtoſunek bliſki ieſt ſtoſunkowi 8 do 17. a bo 17 do 36, a bardzo mało różni ſię od ſtoſunku 33 do 70.

103. *Uwaga* 3. Ponieważ ściany Oſtroſłupa ſą powierzchniami płaſkiemi i to ieſzcze tròykątnemi, wyznaczenie iego powierzchni, żadney nie podlega trudności. Gdy Oſtroſłup ieſt foremny, powierzchnia iego (oprócz podſtawy) ró-

wna

wna będzie Tróykątowi, któryby miał za podſtawę, obwod podſtawy Oſtroſłupa; a wyſokość równą wyſokości ściany któreykolwiek (ponieważ wſzyſtkie ſą równe.)

Wyboczenie (Digreſſio) *o ſposobie wyczerpania nazwanego po Łacinie* Methodus exhauſtionis; *maiące ſłużyć za wſtęp do Rozdziałów naſtępuiących.*

104. Spoſob, którego ſię używło dla dowiedzenia równości dwóch Oſtroſłupów, których podſtawy i wyſokości ſą równe, na to wypada, aby okazać, iż każdy z tych Oſtroſłupów zawarty ieſt między dwiema ilościami, których różnica może być mnieyſza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; to ieſt: że każdy Oſtroſłup ieſt zawarty między ſummą Graniaſtoſłupów na nim opiſanych i ſummą Graniaſtoſłupów weń wpiſanych; i że tych dwóch ſumm różnica może być mnieyſza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; a tym bardziey każdego z tych Oſtroſłupa różnica, od iedney z tych ſumm, może być mnieyſza, niż iakakolwiek ilość naznaczona. Zkąd można było Oſtroſłupom porownywanym do ſiebie przyſtoſować to wſzyſtko, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku iedney

dney z tych summ, nap: summy Graniastosłupów opisanych na iednym Ostrosłupie, do drugiey z tych summ, to iest do summy Graniastosłupów w iednakiey liczbie, opisanych na drugim Ostrosłupie. Ze zaś, gdy Ostrosłupy miały równe podstawy i wysokości, te dwie summy Graniastosłupów były równe; więc też i Ostrosłupy, których różnica od tych dwóch summ może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona, będą równe.

105. Gdyby dwa Ostrosłupy miały tylko wysokości równe, a podstawy nierówne; możnaby tymże samym prawie sposobem okazać, że są do siebie, iak ich podstawy; a to ztądby się wniosło, że w tymże samym stosunku byłyby do siebie summy Graniastosłupów opisanych na każdym z tych Ostrosłupow; i że każdy z tych Ostrosłupów może się różnić od każdey z tych summ, odpowiadaiących sobie, ilością mnieyszą, niżeli iest iakakolwiek ilość naznaczona.

106. Ponieważ ten sposób wnoszenia stosunku dwóch ilości, które bezśrednie z sobą porównywać iest trudno, będzie bardzo często używany w Rozdziałach nastę-

następuiących, przeto nie zawadzi okazać ieszcze pewność iego na kilku przykładach, aby iuż potym nie trzeba było za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, ktòry zawsze iest iednakowy.

Przykł. 1. Niechby dowiedziono było, że dwa Ròwnoległoboki maiące ròwne wysokości, są do siebie, iak ich podstawy. Trzeba ieszcze dowieść, że i dwa Troykąty, ktòrych ròwne są wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy. (W tym zaś stawiamy się mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Tròykąt iest połową Ròwnoległoboku, teyże co on podstawy i wysokości:)

Táb. IV. Fig. 6. Niech będą dwa Tróykąty: ABC,abc. ròwney wysokości, a z nie ròwnemi podstawami; trzeba dowieść, że się tak maią do siebie, iak ich podstawy; a to ztąd, że i Ròwnoległoboki iednakiey wysokości są do siebie, iak ich podstawy.

Podzielmy bok ieden nap. AC, na pewną liczbę części rownych. Przez wszystkie punkta podziału poprowadźmy rownoodległe od podstawy; a na każdey z tych ròwnoodległych wpiszmy i opiszmy Tróy-

Tròykątowi ABC, Rownoległoboki, maiące za ſpolną wyſokość rόwne oddalenie dwoch naybliżſzych ròwnoodległych.

Ròżnica Rόwnoległoboków opiſanych, od Ròwnoległoboków wpiſanych, ròwnać ſię będzie naywiękſzemu z nich Ròwnoległobokowi. Ta zaś ròżnica może być mnieyſzą zrobiona, niż iakikolwiek Ròwnoległobok naznaczony, odmieniwſzy go na inny Rόwnoległobok, któryby tę ſamę; co i Troykąt miał podſtawę, i kąt z nim przy podſtawie ſpolny, a potym podzieliwſzy drugi bok AC, Tróykąta na tyle części rόwnych, aby każda z nich mnieyſza była od drugiego boku, Rόwnoległoboku naznaczonego.

Gdyby to być mogło, abc dwa Tróykąty: ABC, abc. nie miały ſię do ſiebie, iak ich podſtawy; tedy ieden z tych Troykątow; nap: ABC, byłby do uczynienia tego ſtoſunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, ieżeli to być może, trzeba powiękſzyć Tròykąt ABC. Rόwnoległobokiem ABFE: aby ſię tak miał do Tròykątą abc, iak AB do ab.

Podziel-

Podzielmy bok AC. na tyle części równych, aby każda z nich mnieyſza była od linii AE; wpiſzmy potym i opiſzmy Tróykątowi Równoległoboki, w ſpoſób wyżey wyrażony. Niech będzie naywiększy z nich Równoległobok AGHB. Różnica ſummy Równoległoboków opiſanych od ſummy Równoległobokow wpiſanych, uczyniona ieſt mnieyſzą, niżeli Równoległobok ABFE; tym bardziey zaś Różnica ſummy Równoległoboków opiſanych, na Tróykącie ABC, od tegoż Tróykąta, ABC, mnieyſza będzie, niżeli Równoległobok ABFE; a zatym ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych, mnieyſza ieſt od Równoległoboku ABFE, wraz wziętego z Tróykątem ABC.

Podzielmy i bok ac, Tróykąta abc, na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok AC; opiſzmy natym Tróykącie Równoległoboki, tak iak wyżey.

Równoległoboki opiſane, na tych dwóch Tróykątach, a odpowiadaiące ſobie, tak ſię mieć będą do ſiebie, iak podſtawy AB, ab, tychże Tróykątow; więc też i ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych na Tróykącie ABC, tak ſię

mieć

mieć będzie do summy Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, iak podstawa AB, pierwszego Tróykąta, do podstawy ab, drugiego; to iest: przez przypuszczenie, iak summa, z Tróykąta ABC, i z Równoległoboku ABFE, do Tróykąta abc. A że zrobiliśmy pierwszy poprzednik mnieyszym od drugiego, więc też i pierwszy następnik byćby powinien mnieyszy od drugiego; to iest summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, powinnaby być mnieysza od Tróykąta abc, co iednak być nie może; a zatym stosunek podstaw tych dwóch Tróykątów, tenże sam iest, co i samych Tróykątów.

Podobnym sposobem możnaby okazać, że i drugi Tróykąt abc, nie powinien być powiększony, aby miał ten sam do Tróykąta ABC, stosunek, co i ich podstawy.

Przykł: 2. Niech Tróykaty ABC. abc. wystawuią dwòch Ostrosłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki C, c, i przez prostopadłe spuszczone od tych wierzchołków do podstaw Ostrosłupów. Niech te obadwa Ostrosłupy. będą iednakiey wysokości. Trzeba dowieść, że bryłowatości tych Ostrosłupów, tak się maią

ią do ſiebie, iak ich podſtawy, a to z własności Graniaſtoſłupów iednakowey wyſokości, które także w takim iak ich podſtawy ſtoſunku ſą do ſiebie, czego ſię iuż wyżey dowiodło.

Okaże ſię, w podobny ſpoſob, że opiſawſzy i wpiſawſzy iednemu z tych Oſtroſłupowi, Graniaſtoſłupy, równey wſzyſtkie wyſokości; różnica wpiſanych od opiſanych, równać ſię będzie naywiękſzemu Graniaſtosłupowi opiſanemu, i że można w to potrafić, aby ta różnica mnieyſza była niż iakikolwiek Graniaſtoſłup naznaczony; a tym bardziey różnica Oſtroſłupa od każdey z tych ſumm mnieyſza będzie, niżeli ten Graniaſtoſłup.

Wpiſawſzy i opiſawſzy drugiemu Oſtrosłupowi, tyle co i pierwſzemu Graniaſtosłupów; ſumma tych wſzyſtkich Graniaſtosłupów opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, tak ſię mieć będzie do ſummy opiſanych na drugim, iak podſtawa pierwſzego Oſtroſłupa, do podſtawy drugiego. Także i ſummy Graniaſtoſłupów wpiſanych, w tym ſamym ſtoſunku będą, co i podſtawy dwóch Oſtroſłupów.

Gdyby to albowiem być mogło, aby ſtoſunek dwóch tych Oſtroſłupow, nieró-

wny

wny był ſtoſunkowi ich podſtaw, tedy ieden z tych Oſtroſłupòw, byłby nap: nadto mały na ten ſtoſunek. Przydaymy mu więc tę ilość, ktorą powiękſzony, zachowa ten ſtoſunek, i zamieńmy tęż ilość na Graniaſtoſłup równey z nim podſtawy. Temu Oſtroſłupowi wpiſzmy i opiſzmy Graniaſtoſłupy iednakiey wyſokości, tak iednak małey, aby różnica ſumm Graniaſtoſłupów wpiſanych od opiſanych, mnieyſza była od różnicy naznaczoney; będzie tym bardziey różnica ſummy Graniaſtoſłupów opiſanych na tym Oſtroſłupie, od tegoż Oſtroſłupa mnieyſza, niżeli różnica naznaczona; a zatym ſumma tych Graniaſtosłupòw mnieyſza będzie niżeli ſumma z Oſtroſłupa i z różnicy naznaczoney.

Na drugim Oſtroſłupie opiſzmy tyleż co i na pierwſzym Graniaſtoſłupów.

Summa wſzyſtkich Graniaſtoſłupòw opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, tak ſię mieć będzie do ſummy Graniaſtoſłupów opiſanych na drugim Oſtroſłupie, iak podſtawa pierwſzego Oſtroſłupa, do podſtawy drugiego; to ieſt: iak ſumma z pierwſzego Oſtroſłupa, i z różnicy iego mniemaney, do drugiego Oſtroſłupa.

Aże

Aże się pokazało, iż pierwszy poprzednik mnieyszy iest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby być mnieyszy od drugiego, co iednak być nie może.

Więc stosunek dwóch tych Ostrosłupow, nie różni się od stosunku ich podstaw,

107. *Uwaga*. Użyliśmy iuż tego sposobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w Części I. Dowiodłszy albowiem, iż obwody dwóch Wielokątów foremnych, z iednaką liczbą boków, wpisanych, lub opisanych, dwóm kołom, tak się do siebie maią, iak tych kół promienie; pokazawszy oraz, iż różnica obwodu koła, od obwodu Wielokąta wpisanego, lub opisanego, mnieyszą być może od iakieykolwiek ilości naznaczoney, wywiedliśmy zrąd proporcyonalność okręgów kół, do ich promieni. Dowiedliśmy także zrówności koła z Tróykątem maiącym za wysokość promień iego, a za podstawę, okrąg; a to z podobney własności Wielokąta na kole opisanego,

W którymkolwiek z tych przykładów, nap: w ostatnim, koło iest granicą między Wielokątami wpisanemi, i opisanemi, do

ktòrey

którey każdy z nich, tym bardziey się zbliża, im więceyboków mu damy, tak dalece, że przyiść można do tego, iż ich obwody różnić się od siebie będą mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość naznaczona, a tym mniey ieszcze różnić się będą ich obwody od okręgu koła. Wielokąty podobne na dwóch kołach opisane, zawsze tę maią własność, iż są proporcyonalnemi tychże kół promieniom. Łącząc te z sobą własności, wypadło z nich, że i granice tych Wielokątów, to iest koła, tęż samę własność maią; lubo choćby ie na więcey coraz cząstek podzielić (bylebу ich liczba była skończona) nieprzyidziemy nigdy do tego, abyśmy cale zgubili tę różnicę która zachodzi między Wielokątem, i kołem, to iest, abyśmy Wielokąt cale na koło iemu równe zamienili.

Ten sposob postępowania, nazywa się *sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, którym się to, i sprawiedliwie niezdawało, aby liniie krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiey, maleńkich liniy prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbior bardzo wielu powierzchni płaskich, małości nad-

zwyczayney; bryły także krzywe, aby uważać iak *Wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę, bokòw maiące.

Po tych, które się tu dały obiaśnieniach, obeydzie się w następuiących podaniach, bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego sposobu *wyczerpania*. Dosyć będzie okazać, że powierzchnie krzywe i Bryły niemi zakończone, o których mamy mówić, zawa te zawsze są między powierzchniami lub Bryłami, o których iuż mowiliśmy, a które mogą się rożnić od siebie mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość podana. Gdy zaś przyidzie mówić o ścianach Brył, o ich *warstach* (laminæ) i t. d, tedy rozumiem, że przez poprzedzaiące obszerne obiaśnienia, dosyć się wytłumaczyło, iak dalecy być powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaszczyzn, i od uważania Brył, iakoby złożonych z powierzchni usłanych iednych nad drugiemi.

ROZ-

ROZDZIAŁ VII.

O Walcach.

150. Niech będą dwa koła rowne nakreślone na dwòch płaszczyznach rownoodległych. Przez liniią łączącą ich środki, niech przechodzi iakakolwiek inna płaszczyzna. Niech będą złączone inną liniią końce dwòch promieni znayduiących się po iedney stronie linii łączącey środki, i służących za spolne przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyznami dwòch koł; niechay ta liniia końce dwòch promieni łącząca obraca się rownym wszystkich iey punktòw ruchem, około okręgòw tych dwòch koł. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii naznaczona, nazywa się *powierzchnią Walcową*. Bryła zakończona temi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcem* (Cylinder.) Liniia prosta łącząca środki tych dwòch koł, nazywa się *Osiątego* Walca. (Axis) Dwa koła na ktòrych się Walec kończy, nazywaią się iego *podstawami*. Prostopadła spuszczona od punktu ktòregokolwiek, iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiey, nazywa się *wysokością* Walca. Gdy oś

Walca, albo liniia łącząca środki dwòch podſtaw iego, proſtopadłą ieſt do płaſzczyzn podſtaw, Walec zowie ſię *proſtym*, gdy zaś ta oś ieſt pochyłą do tychże płaſzczyzn, wtedy Walec zowie ſię *ukośnym*.

109. *Wnioſek.* Liniia robiąca obrotem ſwoim powierzchnią walcową, ròwnoodległą ieſt w początkowym ſwoim położeniu, od oſi walca [bo ta liniia z oſią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokącie tym, którego dwoma innemi bokami, ſą dwa promienie koł ròwne i rôwnoodległe). Że zaś ta liniia zawſze ieſt od pierwſzego ſwego położenia ròwnoodległą, więc zawſze będzie ròwnoodległą od oſi. Wzaiemnie, gdy przez punkt ktòrykolwiek powierzchni walcowey pociągniemy liniią, równoodległą od oſi, ta liniia zmieſza ſię z linią ktòra obrotem ſwoim kreśli powierzchnią Walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta liniia znaydować ſię będzie na powierzchni walcowey. Liniia ròwnoodległa od oſi, a przechodząca przez punkt ktòrykolwiek powierzchni walcowey, nazywa ſię *bokiem* Walca; wſzyſtkie zatym boki Walca ſą równe, a wſzczegulności rownaią ſię oſi.

110.

110. *Twierdz.* 1. Przeciąwszy Walec płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to będzie kołem.

Niech będzie CAac, połową przecięcia Walca, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego Cc, i niech BD będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey równoodległey od podstawy. *Tab. V. fig. 1.*

Przecięcie Walca przez tę drugą płaszczyznę, będzie kołem.

Dowodz: Bok Aa, Walca iest od osi Cc równoodległym; przecięcia także BD, CA płaszczyzny przechodzącey przez oś, i dwóch płaszczyzn równoodległych, są równoodległem; więc Czworokąt: ACBD, iest Równoległobokiem, a zatym bok BD, równa się bokowi AC.

Tymże sposobem okazać można równość wszystkich liniy prowadzonych od punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni Walcowey, przez płaszczyznę równoodległą od podstawy; a zatym to przecięcie iest kołem, którego środkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe, a wszczególności, równe są podstawie.

111.

111. *Wniosek.* Ztąd wynika inny sposob. ktòrym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek Walca, to iest przez ruch koła taki, ktòrymby się to koło w ròwney zawsze od pierwszego swego położenia odległości posuwało, a ieden z punktów iego nie schodził nigdy z linii prostey daney co do iey położenia.

W szczegulności zaś, Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem Rownoległoboku prostokątnego, około iednego z bokòw iego.

112. *Twierdz:* 2. Powierzchnia krzywa (g) Walca prostego, ròwna się Prostokątowi, ktòryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

Dowodz: Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niey dwa Wielokąty foremne, z ròwną liczbą bokòw, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważaymy iakoby zrobione Graniastosłupy proste,

(g) *Powierzchnią krzywą Walca nazywamy tę, w ktòrą nie wchodzą podstawy Walca.*

ſte, teyże co i Walec wyſokości; powierzchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniaſtoſłupów równe będą względem Proſtokątów maiących w ſokość Walca; podſtawy zaś równe obwodom tych Wielokątów, a zatym te dwie powierzchnie pobocznych ścian Graniaſtoſłupów, tak ſię mieć do ſiebie będą, iak obwody tychże Wielokątów. Tym mniey więc różnić ſię od ſiebie będą te dwie powierzchnie, im mniey brakować będzie tym Wielokątom do rowności, to ieſt, im większa liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a tym bardziey powierzchnia krzywa, może ſię mniey ieſzcze różnić od iedney z tamtych powierzchni; więc (podług tego co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I.) powierzchnia krzywa Walca proſtego, równa ſię Proſtokątowi maiącemu wyſokość tego Walca, a podſtawę równą okręgowi podſtawy iego.

113. *Wnioſki* 1. Powierzchnie krzywe Walców proſtych, iednakiey wyſokości, tak ſię do ſiebie maią, iak promienie ich podſtaw.

2 Po-

2. Powierzchnie krzywe Walców prostych maiących równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

3. Powierzchnia cała Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość summę z wysokości Walca, i z promienia podstawy iego, (ponieważ summa z powierzchni dwòch podstaw Walca, rowna iest Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, a za wysokość, promień iedney z tych podstaw). Jest zatym powierzchnia cała Walca prostego proporcyonalna Prostokątowi, ktòryby miał za boki, promień podstawy Walca, i summę z tegoż promienia i z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia, iest iednostaynym,)

114. *Uwaga.* Można okazać, iż wyznaczenie powierzchni krzywey Walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do iego osi; ale że wyznaczenie tego obwodu, większey niż początkowey Geometryi wiadomości wyciąga, przeto nie może być przez nię wyznaczona i powiezchnia krżywa Walca ukośnego.

115. *Twierdz:* 3. Dwa Walce równe ſą w bryłowatości, których tak podſtawy iako i wyſokości, ſą równe.

Dowódz: Wpiſawſzy, i opiſawſzy podſtawom tych dwóch Walców, Wielokąty foremne, o iednakowey liczbie boków, a zrobiwſzy na tych Wielokątach, Graniaſtoſłupy równey z Walcami wyſokości, maiące ściany równoodległe względem oſi tych Walców; rożnica Graniaſtoſłupa opiſanego na iednym z tych Walców, od Graniaſtoſłupa w tenże Walec wpiſanego, równać ſię będzie Graniaſtoſłupowi maiącemu tę ſamę, co tamte dwa wyſokość, a podſtawę równą różnicy dwoch ich podſtaw. A że różnica tych dwóch podſtaw, mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; więc też i różnicę dwoch Graniaſtoſłupow, wpiſanego i opiſanego, można uczynić mnieyſzą od iakieykolwiek ilości naznaczoney, a tym bardziey różnica iednego z tych Graniaſtoſłupa, od Walca może być mnieyſzą uczyniona, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Ze zaś dwa Graniaſtoſłupy podobne, nap: opiſane na tych dwoch Walcach ſą równe, więc też i te dwa Walce ſą rów-

wne

wne, (podług tego co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania.)

116. *Twierdzenie* 4. Walce z równemi podſtawami, maią ſię do ſiebie, iak ich wyſokości.

117. *Twierd*, 5. Walce z równą wyſokością maią ſię do ſiebie, iak ich podſtawy.

Dowodzenie tych dwóch Twierdzeń to ſamo ieſt prawie, co i dowodzenie Twierzenia 3; położywſzy ſtoſunki nie równości podſtaw, lub wyſokości, na mieyſce ſtoſunków równości.

118. *Wnioſki* Cokolwiek ſię powiedziało o porownywaniu Graniaſtoſłupow maiących podſtawy rożnego gatunku, wſzyſtko to przyſtoſować można do porownywania Walcow z Graniaſtoſłupami. Walec równy naprzykład ieſt iakiemukolwiek Graniaſtoſłupowi maiącemu rowną z nim podſtawę i wyſokość. Walec tak ſię ma Graniaſtoſłupa teyże co on wyſokości, iak podſtawa tego Walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, a zatym Walec tak ſię ma do Graniaſtoſłupa teyże co i on wyſokości, a którego podſtawa

ieſt

ieſt Wielokątem opiſanym na podſtawie Walca, iak podſtawa Walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, to ieſt, iak obwod podſtawy Walca, do obwodu podſtawy Graniſtoſłupa; nap: Walec, ktòrego wyſokość ròwna ſię średnicy podſtawy iego, tak ſię ma do Sześcianu tey średnicy, iak okrąg koła, do teyże średnicy wziętey 4 razy.

Gdy Walec ròwny ieſt Graniaſtoſłupowi w bryłowatości, wyſokość ich będzie w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, i znowu, ieżeli wyſokości ſą w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, tedy Walec równa ſię Graniaſtoſłupowi.

Stoſunek dwòch Walców, może podobnie, iak i ſtoſunek Graniaſtoſłupow, wyłożonym być w liniiach ſpoſobem naſtępuiącym: Wyraźmy w liniiach ſtoſunek ich podſtaw; znalazſzy trzecią proporcyonalną do promienia Walca pierwſzego, i do promienia Walca drugiego. Do wyſokości Walca pierwſzego, do wyſokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, ſzukaymy czwartey proporcyonalney; ſtoſunek promienia Walca pierwſzego, do tey czwartey proporcyonalney, ròwny będzie ſtoſunkowi

bryło-

bryłowatości pierwſzego Walca, do bryłowatości drugiego.

Przykład liczebny. Niech będzie promień podſtawy drugiego Walca, trzy razy tak wielki iak promień podſtawy pierwſzego; wyſokość zaś drugiego Walca, niech będzie cztery razy tak wielka, iak wyſokość pierwſzego. Trzecia proporcyonalna do promienia Walca pierwſzego i do promienia Walca drugiego, będzie 9. razy tak wielka, iak promień pierwſzego Walca; a ponieważ wyſokość drugiego Walca, 4 razy ieſt tak wielka iak wyſokość pierwſzego, będzie więc czwarta proporcyonalna do wyſokości pierwſzego Walca, do wyſokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, cztery razy tak wielka, iak ta trzecia proporcyonalna, to ieſt: 36 razy tak wielka iak pierwſzy promień, a zatym drugi Walec zawiera w ſobie pierwſzy, razy 36. Jakoż gdyby podſtawa drugiego Walca zawierała w ſobie razy 9 podſtawę pierwſzego, a wyſokość ich była równa, tedy drugi Walec byłby 9 razy tak wielki iak pierwſzy; a że nadto wyſokość drugiego Walca zawiera w ſobie razy 4. wyſokość pierwſzego, będzie więc i z tey miary drugi Walec 4

razy

razy tak wielki, iak pierwfzy, a z obydwóch razem tych miar będzie 36 razy tak wielki, iak pierwfzy.

Co fię zaś tycze miary liczebney iakiego Walca, ta będzie znaleziona, wyraziwfzy nayprzod w liczbach, powierzchnią iego podftawy (podług tego co fię powiedziało o powierzchni koła,) a potym rozmnożywfzy tę liczbę przez inną, oznaczaiącą wyfokość Walca.

119. *Uwaga*. Wyznaczenie dokładne tak powierzchni krzywey Walca proftego, iakoteż i całey iego powierzchni; to ieft dokładne porównywanie tey powierzchni z powierzchnią proftą, nap: z kwadratem, zawiflo od fkwadrowania koła; a zatym od wyproftowania iego okręgu. Toż mowić i o bryłowatości Walca, czyli o dokładnym porownywaniu tey bryłowatości z bryłowatością nap: Sześcianu.

Wyznaczenie wielkości kawałków Walca, maiących za podftawy, wycinki, lub odcinki koła, zawiflo także od wyznaczenia Walca; ponieważ te kawałki tak fię maią do Walca całego, którego

[illegible] fą

ſą częściami, iak ich podſtawy do koła ſłużącego za podſtawę temu Walcowi. (h)

ROZDZIAŁ VIII.

O Oſtrokręgach.

120. DEfin: Niech będzie koło nakreślone na iakiey płaſzczyźnie i niech od punktu nad tą płaſzczyzną znayduiącego ſię, wyciągniona linia lub nitka, obraca ſię około okręgu, tego koła. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii lub nitki naznaczona nazywa ſię *powierzchnią Oſtrokręgu*; Bryła zakończona przez tę powierzchnią i koło, około którego nitka ſię obracała, nazwiemy *Oſtrokręgiem* (Conus), koło, na którym Oſtrokrąg ſtoi, nazwiemy *podſtawą* iego; *wierz-*

(h) *Lubo niektóre części powierzchni Walcowey ſame przez ſię wyznaczyć można; nie można iednak wyznaczyć ich ſtoſunku do całey powierzchni Walca. Toż mówić i o częściach Walca, których bryłowatości mogą być wyznaczone. Ale ta rzecz bardziey ieſt ciekawa, niż użyteczna, dla tego też doſyć ieſt o tym namienić.*

wierzchołkiem zaś, punkt ten, od którego nitka była wyciągniona. Liniia od tego wierzchołku do środka podstawy prowadzona, nazywa się *Osią* Ostrokręgu, a prostopadła spuszczona od wierzchołku do płaszczyzny podstawy: nazywa się *wysokością*. Gdy oś iest prostopadłą do płaszczyzny podstawy, Ostrokręgu; Ostrokrąg nazywa się *prostym*; gdy zaś ta oś nie iest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, Ostrokrąg nazywa się *ukośnym*.

121. *Wniosek.* Poprowadziwszy liniią od wierzchołku Ostrokręgu do którego-kolwiek punktu Okręgu podstawy iego, ta liniia zmiesza się wtedy z nitką rodzącą obrotem swoim, powierzchnią Ostrokręgu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez ten punkt okręgu podstawy; a zatym ta liniia cała będzie na powierzchni krzywey tego Ostrokręgu.

Liniia poprowadzona od wierzchołku Ostrokręgu powierzchni iego krzywey, aż do okręgu podstawy, nazywa się *bokiem* Ostrokręgu.

122. *Twierdz:* 1. Gdy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek Ostrokręgu iakiegożkolwiek przecina go, przecięcie to iest zawsze Tróykątem.

Dowo-

Dowodz: Liniie poprowadzone na tey płaszczyznie od wierzchołku Ostrokręgu, do dwòch punktòw okręgu, w ktòrych go ta płaszczyzna przecina, będą bokami Ostrokręgu, i spoluemi powierzchni iego krżywey, z tą płaszczyzną przecięciami; a zatym przecięcie Ostrokręgu przez tę płaszczyznę, będzie Tròykątem maiącym za podstawę, spolne przecięcie tey płaszczyzny, z płaszczyzną podstawy Ostrokręgu, a za boki, dwie liniie poprowadzone od wierzchołku, do punktòw przecięcia okręgu, od płaszczyzny przechodzącey przez wierzchołek,

123. *Twierdz*: 2. Gdy Ostrokrąg przecięty iest przez płaszczyznę rownoodległą od iego podstawy, przeciecie to iest kołem.

Tab. V. Fig: 2. Niech Tròykąt ASB wyraża iakiekolwiek przecięcie Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez iego Oś, SC; niech liniia DFE wyraża spolne przecięcie tey płaszczyzny i inney ròwnoodległey od podstawy.

Tròykaty SCB, SFE, są podobne; więc SC : CB = SF : FE. Aże płaszczyzna przecinaiąca Ostrokrąg ròwnoodlegle od podstawy

podſtawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy pierwſze wyrazy tey proporcyi ſą ſtałe iakiżkolwiek będzie promień podſtawy przez ktòrą, a razem i przez oś przechodzi płaſzczyzna; więc też i czwarty wyraz ieſt ſtałym. Poprowadziwſzy tedy liniie od punktu F, do okręgu przecięcia, te liniie równe zawſze będą, a zatym to przecięcie ieſt kołem, którego punkt F, ieſt środkiem.

124. *Wnioſki.* Te kol powierzchnie tak ſię do ſiebie maią, iak kwadraty ich promieni, albo iak kwadraty odległości ich od wierzchołka. (To podanie ieſt wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy Oſtrokrąg ieſt proſtym, wtedy wſzyſtkie płaſzczyzny, równoodległe od podſtawy, ſą do Oſi proſtopadłemi; a ztąd, można uważać Oſtrokrąg proſty, iakoby zrobiony obrotem Tróykąta proſtokątnego, około iednego z ramion kąta iego proſtego. To ramie będzie Oſią Oſtrokręgu, drugie, naznaczy powierzchnią podſtawy, przeciwproſtokątna zaś, naznaczy powierzchnią krzywą Oſtrokręgu.

125. *Twierdz: przybrane* 1. Gdy linia poprowadzona na płaszczyznie podstawy Ostrokręgu, dotyka się tey podstawy; płaszczyzna przez tę liniią i przez bok Ostrokręgu do punktu dotknięcia, ciągniony, przechodząca, wszystkie inne punkta swoie mieć będzie za Ostrokręgiem; to iest: nic spolnego z Ostrokręgiem niebędzie miała, oprocz boku, przez który przechodzi,

Tab. V. Fig. 3. Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez Oś SC, i przez podstawy promień CA. Niech AT, będzie styczną z tą podstawą, w końcu A, promienia CA; Płaszczyzna przechodząca przez liniie: SA, AT, będzie mieć za Ostrokręgiem, wszystkie punkta swoie, które nie są w linii SA.

Dowodz: Niech płaszczyzna iakakolwiek równoodległa od podstawy, Ostrokrąg przecina; niech *ca*, będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey przez oś przechodzącey; niech ieszcze *at* będzie przecięciem teyże płaszczyzny, i drugiey przechodzącey przez liniie: SA, AT. Liniie: *ca, at*, będą równoodległemi względem liniy: CA, AT;

a zatym

a zatym kąt *cat*, będzie równy kątowi CAT. Aże kąt CAT, iest prostym, więc prostym także będzie i kąt *cat*; a zatym, oprocz punktu *a*, linii *at*, każdy inny punkt, teyże linii, będzie w większey od środka *c*, odległości, niżeli promień *ca*, to iest: niżeli odległość punktu na powierzchni Ostrokręgu, i oraz na płaszczyznie *cat*, znayduiącego się, od punktu Osi, do teyże płaszczyzny należącego. Każdy tedy inny punkt tey linii *at*, oprocz punktu *a*, iest za okręgiem.

126. *Defin:* O tey płaszczyznie mowi się, iż się *dotyka Ostrokręgu*, ktòra iednę tylko linią ma spolną z powierzchnią krżywą Ostrokręgu.

127. *Wniosek.* Opisawszy Wielokąt na podstawie Ostrokręgu, a przez wierzchołek tego Ostrokręgu, i przez boki Wielokąta przeciągnąwszy płaszczyzny; ponieważ te boki Wielokąta opisanego, służyć będą za podstawy ścian Ostrogranu, wierzchołek zaś iego, będzie ten sam, co i wierzchołek Ostrokręgu, więc ściany tego Ostrogranu dotykać się będą powierzchni Ostrokręgu. Ostrogran ten nazywa się opisanym na Ostrokręgu inny zaś, któryby spolny z Ostrokręgiem

 miał

miał wierzchołek, a za podstawę Wielokąt wpisany w podstawę Ostrokręgu, nazywałby się w Ostrokrąg *wpisanym.*

128. *Twierdz: przybrane* 2. Maiąc dany Ostrokrąg prosty, można weń wpisać, i opisać na nim dwa Ostrograny foremne, którychby stosunek powierzchni ściennych bardziey się zbliżał do stosunku równości, niż iakikolwiek naznaczony stosunek nierówności.

Powierzchnie ścienne tych dwóch Ostrogranów, równaią się Tróykątom, maiącym za podstawy, obwody podstaw Ostrogranów, a wysokości zaś, równe wysokościom iedney z ścian każdego Ostrogranu; a zatym tak się do siebie maią te Ostrograny, iak te dwa Tróykąty. Aże podstawy tych dwóch Tróykątów, tak się maią do siebie, iak prostopadłe spuszczone od środku, do dwóch którychkolwiek boków podstaw Ostrogranu; więc te powierzchnie ścienne, tak się też do siebie mieć będą, iak Tróykąty równey z ścianami Ostrogranów wysokości, a maiące za podstawy, te prostopadłe; albo iak Prostokąty, teyże z dwiema temi Tróykątami podstawy i wysokości. Że zaś stosunek takich dwóch Pro-

Prostokątów, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności, to się tak dowodzi.

Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey przez oś tego Ostrokręgu i przez wysokości SA, SB dwoch ścian Ostrogranów foremnych, i maiących za podstawy Wielokąty z równą liczbą boków; ieden z tych Ostrogranów niech będzie opisanym na Ostrokręgu, a drugi weń wpisanym. *Tab. V. Fig.* 4

Powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego proporcyonalna iest z Prostokątem CA przez SA, a powierzchnia ścienna Ostrogranu wpisanego, proporcyonalna iest Prostokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoodległą od SA. Powierzchnia ścienna Ostrogranu, maiącego za podstawę, podstawę Ostrogranu wpisanego, a za wysokość liniią CD, takby się miała do powierzchni ścienney, Ostrogranu opisanego, iak Prostokąt: CB × BD do Prostokąta CA × AS; to iest (dla podobieństwa Tròykątów SAC, DBC) iak kwadrat z CB do kwadratu z CA; albo iak powierzchnie podstaw, dwóch

Ostro-

Oſtrogranów. A że ſię dowiodło w Rozdziale o kwadrowaniu koła w Części I. że te dwie powierzchnie bardziey mogą być zbliżonemi do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności, więc też i ſtoſunek powierzchni ściennych, tych dwóch Oſtrogranów, bliżſzy może być ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Oſtrogranu, którego SCA ieſt przecięciem, mniey ſię różni od Oſtrogranu, którego przecięciem ieſt: SCB, niżeli od Oſtrogranu, którego przecięciem ieſt: DCB. więc tym bardziey ſtoſunek powierzchni ściennych dwóch Oſtrogranów, iednego wpiſanego, drugiego opiſanego, mniey ſię różnić może od ſtoſunku równości, niżeli od tegoż ſtoſunku różni ſię iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności.

129. *Twierdz. 3.* Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego, równa ſię Tróykątowi maiącemu za podſtawę obwod podſtawy Oſtrokręgu, a za wyſokość bok Oſtrokręgu.

Dowodz. Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego ieſt Granicą między powierz-

wierzchniami ściennemi Ostrogranów prostych weń wpisanych i na nim opisanych. Aże stosunek takich dwóch powierzchni Ostrogranów, może być do stosunku równości bardziey przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany stosunek nie równości, więc tym bardziey stosunek powierzchni Ostrokręgu prostego, do powierzchni iednego z tych Ostrogranów, nap: opisanego, mniey się różnić może od stosunku równości, niżeli się od tegoż stosunku różni iakikolwiek dany stosunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego, równa się Tròykątowi maiącemu za wysokość, bok Ostrokręgu, a za podstawę obwod podstawy, tego Ostrogranu; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, a wszczegulności w Rozdziale o kwadrowaniu koła, że powierzchnia koła, równa się Tròykątowi maiącemu za podstawę obwod koła, a za wysokość, promień iego): Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, iest też równa Tròykątowi, któryby miał za podstawę obwod podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok iego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, równa się wy- cinko-

cinkowi koła, któreby miało za promień, bok Oſtrokręgu, a którego łuk równyby był w długości okręgowi podſtawy Oſtrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, równa ſię także Tróykątowi, maiącemu za wyſokość bok Oſtrokręgu, a za podſtawę łuk tego wycinku, albo okrąg podſtawy Oſtrokręgu.

131. Dla znalezienia ważności kątowey, tego wycinku, następuiąca czyni ſię proporcya: Jak ſię ma bok Oſtrokręgu, do promienia podſtawy iego, tak ſię ma 360° do ważności kątowey, którey ſzukamy.

Jakoż, gdyby bok Oſtrokręgu, był dwa, trzy, i t.d. razy większy od promienia podſtawy, tedy okrąg cały maiący za promień bok Oſtrokręgu, byłby dwa, trzy i t.d. razy więkſzy od okręgu podſtawy; a zatym i łuk pierwſzego koła, któryby ſię równał okręgowi podſtawy, byłby połową, trzecią, częścią i t. d. okręgu, do którego należy.

132. *Defin:* Niech będzie Oſtrokrąg przecięty płaſzczyzną równoodległą od podſtawy iego, Bryła zakończona z iedney ſtrony, podſtawą Oſtrokręgu a z dru-

drugiey tym przecięciem, nazywa się *Ostrokręgiem ściętym* (Conus truncatus.)

133. *Twierdz: 4.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego ściętego, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość, bok tego Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią równą takiemu Okręgowi, którego promieniem byłaby połowa summy promieni do dwóch podstaw Ostrokręgu tegoż ściętego należących; to iest średnia arytmetyczna między dwoma temi promieniami.

Niech Tròykąt SCA, wyraża połowę przecięcia Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey prześ oś iego. Niech tenże Ostrokrąg będzie ieszcze przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy, a spolnym tey płaszczczyzny z pierwszą przecięciem, niech będzie: *ca.* Przeciecie: CAac, oznaczy przecięcie Ostrokręgu ściętego. Pociągniymy liniią AB, prostopadłą do boku SA, i równą Okręgowi koła, którego promieniem iest: CA. Tròykąt SAB, będzie równy powierzchni krzywey Ostrokręgu całego: poprowadźmy ieszcze liniią *ab*, równoodległą od AB, i spotykaiącą w punkcie *b*, liniią SB. Ta liniia *Tab. V. Fig. 5.*

ab,

ab, będzie też rowna okręgowi koła, którego, promieniem iest: *ca*, a Tróykąt *bab*, równać się będzie powierzchni krzywey Ostrokręgu *Sac*; będzie zatym Czworokąt ABba, rowny powierzchni krzywey Ostrokręgu sciętego caCA.

Podzielmy teraz liniią Aa, na dwie części równe w punkcie: E. i poprowadźmy EF, równoodległą od AB.

Ta liniia EF, będzie rowna okręgowi koła, ktorego promień rownałby się linii: ED, to iest średniey Arytmetyczney między promieniami, CA, i *ca*, dwoch podstaw Ostrokręgu ściętego; a przeto powierzchnia Czworokąta ABba, rowna się Prostokątowi AHGa, maiącemu za wysokość, bok Aa, Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią EF rowną okręgowi średnie arytmetycznie proporcyonalnemu, między okręgami dwoch podstaw tegoż Ostrokręgu.

134. *Uwaga* 1. Wyrażenie następuiące powierzchni krzywey Ostrokręgu prostego, czyli to całego, czyli też ściętego, posłuży nam, gdy mowić będziemy o powierzchni *kuli* (Sphera.)

Od

Od środku E, linii Aa, wyciągniymy liniią EI proſtopadłą do Aa, ſpotykaiącą oś SC, w punkcie I. Poprowadźmy i drugą liniią aL, rownoodległą od SC, a proſtopadłą do AC.

Summa kątow IED, DEa, rowna ſię kątowi proſtemu; tak iako i ſumma kątow: AaL, DEa; więc te dwie ſummy ſą ſobie rowne; a zatym kąt IED, rowna ſię kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa Troykąty proſtokątne: IED, AaL, a zatym boki ich będą proporcyonalne; więc, IE : ED = Aa : aL, (albo Cc) a ztąd i okręgi, maiące za promienie, liniie: IE, ED, ſą też do ſiebie, iak liniie: Aa, Cc; a zatym Proſtokąt z linii Cc, przez okrąg, ktorego liniia IE, byłaby promieniem, rownałby ſię Proſtokątowi z linii Aa, przez okrąg, ktoryby miał za promień, liniią ED. Aże ten drugi Proſtokąt rowny ieſt powierzchni krzywey Oſtrokręgu ściętego; więc też i pierwſzy byłby rowny tey że Oſtrokręgu ściętego powierzchni. Jeſt tedy powierzchnia krzywa Oſtrokręgu ściętego, rowna Proſtokątowi maiącemu wyſokość rowna wyſokości Oſtrokręgu ściętego, a podſtawę rowną okręgowi takiego koła, ktorego promieniem byłaby proſtopadła, od środku boku Oſtrokręgu ściętego wyciągniona, aż do

iego

iego osi, która to prostopadła iest czwartą geometrycznie proporcyonalną, do wysokości Ostrokręgu ściętego, do iego boku, i do średniey arytmetyczney między dwoma promieniami; co wszystko łatwo przystosować można i do Ostrokręgu ściętego.

135. *Uwaga* 2. Wyznaczenie więc dokładne powierzchni Ostrokręgu, lub iey części, zawisło od wyprostowania okręgu koła.

Co się tycze Ostrokręgu ukośnego, ieszcze cięższey iest wyznaczyć powierzchnią iego krzywą, niżeli Walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierówności iego boków, a zatym z nierówności ścian Ostrogranów, z podstawami foremnemi, opisanych lub opisać się mogących na tym Ostrokręgu.

136. *Twierdz. przybrane* Bryłowatości dwóch Ostrogranów z podstawami foremnemi, iednego wpisanego w Ostrokrąg, a drugiego na nim opisanego, różnica może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona; to iest stosunek ich bryłowatości, może bardziey być przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności.

Dowodz:

Dowodz: Różnica tych dwóch Ostrogranów, równa się Ostrogranowi teyże co one wysokości, a którego podstawa byłaby równa różnicy ich podstaw. A że stosunek tych podstaw, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż dany iakikolwiek inny stosunek nie równości, więc też i stosunek tych dwóch Ostrogranów, może się zbliżyć do stosunku równości bardziey niż inny dany iakikolwiek stosunek nie równości. Zamieniwszy różnicę dwóch Ostrogranów, na trzeci Ostrogran teyże co one wysokości, można będzie wpisać i opisać podstawie Ostrokręgu dwa Wielokąty, z równą liczbą boków, takie, którychby różnica mnieysza była od podstawy tego trzeciego Ostrogranu, a tym bardziey ieden z Ostrogranów, wystawionych na tych Wielokątach, równey z Ostrokręgiem wysokości, mniey się różnić będzie od Ostrokręgu, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdz.* 5. **Bryłowatość iakiegokolwiek Ostrokręgu, iest trzecią częścią bryłowatości Walca równey z Ostrokręgiem podstawy i wysokości.**

Dowodz: Ostrograny i Graniastosłupy *iednoimienne* (eiusdem nominis) wpisane,

lub

lub opisane, pierwsze na Ostrokręgu, a drugie na Walcu, iednakiey z niemi wysokości, są trzecią częścią pierwsze względem drugich. Aże te Ostrograny i Graniastosłupy mogą się różnić pierwsze od Ostrokręgu, drugie od Walca, na którym są nap. opisane, mniey niż iakąkolwiek daną ilością; więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania) Ostrokrąg iest też trzecią częścią Walca.

138. *Wniosek.* Cokolwiek mowiliśmy o porównywaniu Walców, zawisłym od ich wysokości, i podstaw, można to wszystko i do Ostrokręgów przystosować, które trzecią ich są częścią; podobnie iakośmy i to co się mówiło o porownywaniu Graniastosłupów, do Ostrogranów przystosowali. J tak.

1. Ostrokręgi, których podstawy są równe, maią się do siebie, iak ich wysokości.

2. Ostrokręgi, których wysokości są równe, maią się do siebie, iak ich podstawy.

3. Ostrokręgi, których bryłowatości są równe, maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4.

4. Ostrokręgi, których podstawy maią się do siebie, w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe.

5. Stosunek dwóch Ostrokręgów w liniiach wyrażony, tak się znayduie: zamienia się stosunek podstawy iednego, do podstawy drugiego na stosunek linii do linii; znayduiąc trzecią proporcyonalną do promienia podstawy pierwszego Ostrokręgu, i do promienia podstawy drugiego. Zamienia się także stosunek wysokości pierwszego Ostrokręgu, do wysokości drugiego, na stosunek trzeciey proporcyonalney znalezioney, do czwartey. Stosunek promienia podstawy pierwszego Ostrokręgu, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie stosunkowi pierwszego Ostrokręgu, do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowatości Ostrokręgu, znayduiemy; mnożąc liczbę oznaczaiącą wielkość powierzchni podstawy iego, przez liczbę oznaczaiącą wielkość wysokości, a potym tey liczby rozmnożoney biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowatości Ostrokręgu, zawisło od wyznaczenia

nia dokładnego, iego podstawy, a zatym od wyprostowania okręgu koła.

Bryłowatość Ostrokręgu, równa się bryłowatości iakiegokolwiek Ostrogranu, równey z Ostrokręgiem wysokości i podstawy.

139. *Twierdz*: 6. Bryłowatość Ostrokręgu prostego, równa się bryłowatości Ostrokręgu innego, którego powierzchnia podstawy byłaby równa, powierzchni całey Ostrokręgu prostego, a wysokość, równa promieniowi koła wpisanego w Tróykąt równoramienny wyrażaiący przecięcie Ostrokręgu prostego od płaszczyzny przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie ASB przecięcie Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przez oś iego przechodzącey.

Tab. V. Fig: 6. Niech będzie SC prostopadła do AB, wysokością, czyli osią tego Ostrokręgu. Podzielmy ieden z kątów przy podstawie AB, nap: kąt A, na dwie równe części, przez liniią AD, i prowadźmy ią aż do punktu D, prostopadłey SC; od tegoż punktu D, niech idzie prostopadła DE

DE do SA. Liniie równe DC, DE, będą promieniami, koła wpisanego w Tròykąt przechodzący przez oś Ostrokręgu.

Powierzchnia podstawy Ostrokręgu, tak się ma do iego powierzchni krzywey, iak AC, do AS; a zatym powierzchnia podstawy, tak się miec będzie do całey powierzchni Ostrogręgu, iak AC do AC+AS, albo iak AC^2 do AC (AC+AS); więc powierzchnia cała Ostrokręgu równa się kołu maiącemu za promień średnią geometryczną między promieniem AC podstawy Ostrogręgu, i sumą z tego promienia i z boku Ostrokręgu. Aże liniia AD, dzieli kąt CAS na dwie rówwne części więc AS : AC = SD : CD; i AS+AC : AC = SD+CD : CD; a nakoniec (AS+AC) AC : AC^2 = SC : CD.

Więc Ostrokrąg maiący za promień podstawy, średnią geometryczną między AC, i $\overline{AC+AS}$, a za wysokość liniią CD, miałby powierzchnią swoię, do powierzchni Ostrokręgu podanego, w stosunku odwrotnym wysokości; a zatym te dwa Ostrokręgi byłyby równe. Że zaś pod-

N stawa

ſtawa pierwſzego Oſtrokręgu ieſt równa całey powierzchni Oſtrokręgu podanego; więc bryłowatość Oſtrokręgu proſtego, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu innego, maiącego podſtawę równą całey proſtego Oſtrokręgu powierzchni, a wyſokość równą promieniowi koła wpiſanego w Tróykąt, który ieſt przecięciem tego Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącey przez oś iego.

ROZDZIAŁ IX.

O Kuli.

140. DEfin: Niechby Połkole obracało ſię około ſwoiey średnicy. Okrąg iego przebiegnie, tym ſwoim obrotem powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *Powierzchnią kuliſtą* (ſuperficies ſpherica); całe zaś połkole obiegnie mieyſce tą powierzchnią krzywą zakończone, które ſię nazywa *Kulą* (Sphera albo Globus).

Podczas tego obrotu, każdy punkt okręgu połkola, w iednakowey zawſze byłby od iego środka odległości; a zatym i każdy punkt powierzchni kuliſtey, w iednakowey też będzie odległości od tego środka.

Kula

Kula więc ieſt bryłą zakończoną przez powierzchnią krzywą, ktòrey wſzyſtkie punkta iednakowo ſą odległe od pewnego punktu nazwanego *środkiem.*

Odległość środka od punktu ktòregokolwiek powierzchni kuli, nazywa ſię *promieniem.* Liniia każda przechodząca przez środek kuli, a po obydwòch ſtronach kończąca ſię na iey powierzchni, nazywa ſię średnicą, i dwa razy ieſt większa od promienia. Ta zaś średnica, około ktòrey obracaiąc ſię połkole, zrobiło kulę nazywa ſię *Oſią* kuli.

Gdybyśmy przecieli kulę płaſzczyżną przechodzącą przez iey środek, wſzyſtkie punkta przecięcia powierzchni kuliſtey, przez tę płaſzczyznę, byłyby iednakowo odległe od środka kuli, ktòry na tymże ieſt przecięciu.

Więc takie przecięcie ieſt kołem maiącym za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny, ktòra przez iey środek przechodzi, nazywa ſię *wielkim kołem kuli.*

Dwa takie koła przecinaią ſię, iedno z drugim na dwie części rowne.

Na — Jakoż

Jakoż ſpolne ich przecięcie przechodzi, przez środek kuli, a zatym i przez środek tak iednego, iak i drugiego koła; więc ieſt średnicą obydwòch. Aże średnica przecina koło na dwie równe części, więc i dwa koła wielkie kuli przecinaią ſię na dwie części równe.

Gdyby kula przecięta była płaſzczyzną nie przechodzącą przez iey środek, ale proſtopadłą do oſi iey obrotu, przecięcie to kuli byłoby kołem od ſpolnego przecięcia tey płaſzczyzny z płaſzczyzną połkóla, nakreślonym, pod czas obrotu tegoż połkola tworzącego kulę.

Ze zaś można ſobie wyſtawić w myśli, kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot ktòregokolwiek połkola wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrotu powſtała, iednakowey zawſze ieſt wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaſzczyzną, wſzędzie przecięcie iey, będzie kołem; ponieważ można wziąść za oś kuli, tę iey średnicę, ktòra do tey płaſzczyzny ieſt proſtopadłą.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny nie przechodzącey przez iey środek, nazywa ſię *małym kołem.*

Gdy

Gdy przez koniec promienia kuli, przechodzi płaszczyzna prostopadła do tego promienia, wszystkie inne punkta tey płaszczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość któregokolwiek innego punktu tey płaszczyzny, od środka kuli, iest przeciwprostokątną Tróykąta prostokątnego, który ma promień, za iedno ramie kąta prostego, a za drugie, odległość tego punktu, od końca promienia. Wszystkie tedy inne punkta tey płaszczyzny są pośrodka odległe większą ilością, niżeli iest promień, a zatym są za kulą.

O płaszczyznie, nie maiącey ani mieć mogącey więcey nad ieden punkt spolny z kulą, mówi się, iż się kuli *dotyka*. Ta zaś płaszczyzna powinna być prostopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnąwszy na tey płaszczyznie iakąkolwiek liniią prostą, ta będzie prostopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatym liniia ta, będzie styczną z tym kołem, któreby było prze-

cięciem

cięciem kuli od płaszczyzny przechodzącey przez tę linię, i przez ten promień.

Jakośmy się zatrudniali wyżey około Walcow, i Ostrokręgow prostych, tak teraz zatrudniać się będziemy około powierzchni i bryłowatości kuli, i iey częśći rożnych.

141. *Twierdz. przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez ktorego punkt średni poprowadziliśmy styczną, aż do iey zeyścia się z obydwoch stron, z promieniami przeciągnionemi przez końce tego łuku.

Tak iednę, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części rowne i przez punkta podziału, poprowadźmy znowu dwie styczne aż do ich zeyścia się z promieniami przeciągnionemi przez końce tych połow.

Część promienia przeciągnionego, zawarta między okręgiem, i pierwszą styczną, więcey niż dwa razy większa iest od części zawartey między okręgiem, i iedną z drugich dwoch stycznych.

Tab. VI. Fig. 1. Niech będzie ADB, łuk koła przez ktorego punkt średni D, poprowadzoną iest stycz-na

na ſpotykaiąca w punktach E, i e; promienie CB, CA przedłużone. Przez średnie punkta F, i f, łukow: BD, AD, poprowadźmy ſtyczne: GH, Gh, ktòre ſpotykaią w punktach: G, H, h, promienie przechodzące przez końce łukòw: BD, AD.

Trzeba dowieść, iż liniia BE, więcey niż dwa razy ieſt większa od linii BH.

Niech liniia CF, ſpotyka w pukcie L, liniią Ee; Tròykąty: CDL, CFG, mogą przyſtać do ſiebie, więc linie: DG, albo BH, i FL, ſą równe.

Poprowadźmy cięciwę BD, ktòrą liniia CL ſpotyka w punkcie I, i BM ròwnoodległą od CL.

Tròykąty proſtokątne: BDM, IDL, ſą do ſiebie podobne; a że BD dwa razy ieſt większa od DI, więc też i BM, dwa razy większa będzie od IL: a zatym BM. więcey niż dwa razy większa ieſt od FL albo BH. Że zaś w Tròykącie EBM, kąt M, ieſt roztwarty, a przeto liniia BE, większa od linii BM; więc tym bardziey liniia BE, więcey niż dwa razy większa ieſt od linii BH.

142. *Wniosek* 1. Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów: E.H.B, spuśćmy prostopadłe: EO, HP. BQ do promienia CN; stosunek liniy: EB, HB, równy będzie stosunkowi liniy OQ, PQ. Aże EB więcey niż dwa razy jest większa od BH, więc i OQ więcey niż dwa razy większa też będzie od PQ.

143. *Wniosek* 2. Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe; 4.8.16, 32, i t. d. i przez punkta średnie podziałow, pociągniemy styczne, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzącemi przez końce każdego w szczegulności podziału; gdy nadto, od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień przedłużony CE, spuściemy prostopadłą EO, na promień CN; rożnica między odległością spodku O, tey prostopadley, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodku Q, prostopadley BQ, z końca B, łuku AB spuszczoney, ta mowię różnica zmnieysza się więcey niż połową za każdym następuiącym podziałem, a zatym może się na ostatek stać mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney.

144. *Twierdz:*

144. *Twierdz.* 1. Niech będzie łuk koła, mnieyszy od czwartey części okręgu iego; i niech ten łuk obraca się około promienia prostopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez ieden koniec tego łuku. Z drugiego iego końca spuśćmy prostopadłą na pierwszy promień, to iest na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona, tym około osi obrotem łuku, równa się Prostokątowi, maiącemu za podstawę liniią równą całemu okręgowi, którego ten łuk iest częścią; a za wysokość, liniią równą odległości środka, od spodku prostopadłey spuszczoney na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli cztery razy iest większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie prostopadłym do promienia CA, przechodzącego przez ieden koniec tego łuku. *Tab. VI Fig:* 1.

Poprowadźmy BQ, prostopadłą do CN. Niech koła czwarta część ABN, obraca się około promienia CN, iak około osi swoiey. Powierzchnia krzywa, obrotem łuku AB naznaczona, równa się Prosto-

kątowi

kątowi, któryby miał za wyfokość, liniią CQ, a za podftawę, liniią równą okręgowi, którego CA ieft promieniem.

Dowódz: Niech ftyczna Ee, przechodzi przez sredni punkt D. łuku AB, i niech fpotyka w punktach E, i e, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku,

Dzielmy dałey łuk AB, na części równe: 4,8,16 32, i t. d. a od punktu, w którym oftatnia ftyczna fpotyka promień CB, przy każdym następującym podziale, [illegible] prostopadłą na promień CN. Różnica między odległością [illegible], od fpodku tey proftopadłey, a liniią CQ. zmnieyfzać fię będzie więcey niż połową; za każdym naftępnym podziałem; więc różnica ta, może fię nakoniec ftać mnieyfzą, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Podczas obrotu łuku AB, około linii CN, każda ftyczna kreśli powierzchnią krzywą Oftrokręgu [illegible] równaiącą fię Proftokątowi maiącemu za podftawę, liniią równą okręgowi, którego promieniem, ieft CN. a za wyfokość odległość dwóch proftopadłych fpufzczonych

nych na oś, od końcow tey ſtyczney; a zatym ſumma powierzchni krzywych, zrobionych od wſzyſtkich tych ſtycznych, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu tę ſamę podſtawę a wyſokość równą ſummie wſzyſtkich tych wyſokości; to ieſt równą odległości środka, od ſpodku proſtopadłey ſpuſzczoney na oś z punktu tego, gdzie oſtatnia ſtyczna ſpotyką promień CB. Może tedy różnica ſummy powierzchni krzywych Oſtrokręgu zrobionych obrotem wſzyſtkich ſtycznych, mnieyſza być od Proſtokąta z taką iak ſię wyżey powiedziało podſtawą a z wyſokością CQ, niżeli iakakolwiek ilość naznaczona. Summa zaś tych wſzyſtkich powierzchni krzywych, większa ieſt zawſze od powierzchni utworzoney obrotem łuku AB; więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, i w Rozdziale o kwadrowaniu koła) powierzchnia krzywa utworzona obrotem łuku AB, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu za podſtawę, okrąg, którego promieniem ieſt CA, a za wyſokość, odległość CQ, środka C, od ſpodku Q, proſtopadłey ſpuſzczoney na oś z końca B, tego łuku.

Mowiąc w ſzczegulność; powierzchnia Połkuli (Hemisphaerium) utworzoney obro-

brotem czwartey części koła, ABN, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, którego, CA iest promieniem, a za wysokość, promień, CN.

A zatym powierzchnia krzywa, utworzona obrotem łuku BN, równa się Prostokątowi maiącemu wysokość NQ, a podstawę równą okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnia także całey kuli, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę kuli, a za podstawę, okrąg wielkiego iey koła, Aże powierzchnia wielkiego koła równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość połowę promienia, albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła, za podstawę.

Więc powierzchnia kuli cztery razy iest większa od powierzchni wielkiego iey koła, którego promień równa się średnicy kuli.

145. Idzie zatym, że powierzchnia kuli, tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak powierzchnia koła iakiegokolwiek, cztery razy wzięta, do kwadratu średnicy tegoż koła: Aże powierz-

wierzchnia koła, ieſt do powierzchni kwadratu średnicy iego, iak okrąg koła do iey średnicy cztery razy wziętey iako ſię w Rozdziale XIII. Części I. dowiodło) więc powierzchnia kuli tak ſię ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak cztery razy okrąg koła, do średnicy iego cztery też razy wziętey, to ieſt) iak okrąg koła, do ſwoiey średnicy. Więc wyznaczenie dokładne powierzchni kuli, zawiſło od ſkwadrowania koła, i od wyproſtowania okręgu iego.

146. Powierzchnia cała kuli, tak ſię ma do powierzchni nakreśloney obrotem łuku NB, iak ſię ma średnica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat tey średnicy, do Proſtokąta z linii NQ, i z średnicy; albo nakoniec, iak kwadrat średnicy, do kwadratu linii NB; a zatym, iak koło, ktoreby miało za promień tę średnicę, do koła, ktoreby miało za promień linią NB; aże powierzchnia kuli równa ſię powierzchni pierwſzego koła; więc powierzchnia nakreślona obrotem łuku NB, równa ſię powierzchni drugiego koła.

Niech będzie NBFA, połkole tworzące obrotem ſwoim kulę; niech będzie; NbDA Tab. VI. Fig. 2.

Pro-

Proſtokąt, ktòrego podſtawa ieſt średnica tego połkola, a wyſokością promień iego. Podczas obrotu połkola, ten Proſtokąt utworzy Walec proſty, ktòrego powierzchnia krzywa zrobiona przez obrot linii ED, ròwnać ſię będzie Proſtokątowi maiącemu za wyſokość średnicę DE, albo AN, a za podſtawę okrąg podſtawy tego Walca, a zatym ta powierzchnia krzywa, ròwna ſię powierzchni kuli.

147. Podobnie ſię okaże, iż poprowadziwſzy liniią QHP, proſtopadłą do oſi, powierzchnia krzywa należąca do Walca, a zrobiona przez obrot linii EP, ròwna ieſt powierzchni [illegible] do kuli, a zrobioney przez obrot łuku NE.

148. Walec utworzony obrotem Proſtokąta ADEN, miałby wyſokość ròwną średnicy podſtawy ſwoiey; dotykałby ſię w punktach: A, i N, kuli utworzoney obrotem połkola AFBN; dotykałby ſię iey także w okręgu, ktòrego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mòwi ſię, iż ieſt na kuli opiſanym. Nazywa ſię òn także i Walcem Archimedeſa, od nazwiſka tego Matematyka, ktòry pierwſzy znalazł ròwność

wność powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i ſtoſunek ich bryłowatości.

149. Powierzchnia iedney z dwóch podſtaw tego Walca, równa ſię Proſtokątowi z okręgu tey podſtawy, i z połowy iey promienia; a zatym powierzchnia obydwòch razem tych podſtaw, równa ſię Proſtokątowi z okręgu iedney podſtawy, i z iey promienia. Aże powierzchnia krzywa Walca, równa ieſt Proſtokątowi z okręgu podſtawy iego, i z średnicy teyże podſtawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równa ieſt Proſtokątowi z okręgu iego podſtawy, i z promienia trzy razy wziętego; a zatym powierzchnia krzywa tego Walca ieſt $\frac{2}{3}$ powierzchni iego całey; a przeto i powierzchnia kuli ieſt też $\frac{2}{3}$ powierzchni całey Walca na niey opiſanego.

150. *Uwaga.* To, co ſię dotąd powiedziało, trzeba przyſtoſować do niektòrych przykładòw liczebnych podobnych naſtępuiącemu.

Przykł: Jakaż ieſt wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachuiąc na kopień, mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, iedno prostopadłe do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych koł, nap: co dziesięć, albo co pięć stopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaszczyzny równoodległe od koła drugiego. Trzeba znaleść wielkość powierzchni zawartych między dwoma naybliższemi od siebie podstawami.

Wszczegulności zaś, ieżeli uczniowie maią wiadomość początkową Geografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których iedno odległe iest od *Równika* (æquator), na 23° ½, a drugie od *Biegónu* (polus) także na 23° ½.

Tob. VI Fig. 2 Niech będzie CF promieniem iednego koła wielkiego; niech NBF. wyraża czwartą część drugiego koła do niego prostopadłego; niech BQ,bq, będą przecięciami tego koła prostopadłego i dwóch płaszczyzn równoodległych od koła, pierwszego.

Powierzchnia krzywa połkuli, tak się ma do powierzchni części zawartey między płaszczyznami CF i BQ, jak się ma promień kuli, do linii CQ, która iest

wstawą.

wſtawą łuku BF. Podobnie i powierzchnia krzywa połkuli, tak ſię ma do powierzchni części zawartey między płaſzczyznami: CF, i bq, iak wſtawa cała, czyli promień do wſtawy łuku bF, to ieſt do linii Cq. Można więc wyrachować te części powierzchni połkuli, a zatym i ich różnicę, to ieſt: część powierzchni zawartey między płaſzczyznami: BQ, i *bq*.

151. *Twierdz.* 2. Bryłowatość kuli równa ſię $\frac{2}{3}$ bryłowatości Walca na tey kuli opiſanego.

Niech będzie ACBMA czwarta część koła, tworząca Połkulę obrotem ſwoim około promienia CB. Niech będzie CABD kwadrat opiſany na tey czwartey części koła. Ten kwadrat obracaiąc ſię około CB, utworzy Walec opiſany na połkuli, który będzie połową Walca opiſanego na całey kuli. Trzeba dowieść, iż Połkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC równa ſię $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem kwadratu ACBD. Tab.VI. Fig. 3.

Poprowadźmy przekątną CD; Tròykąt BCD utworzy Oſtrokrąg, którego [illegible] O [illegible] pod-

podſtawa wykreślona będzie promieniem BD, a za wyſokość tego Oſtrokręgu będzie BC; to ieſt będzie ten Oſtrokrąg równey z Walcem podſtawy, i wyſokości.

Od dwóch ktòrychkolwiek punktów nap: P, i *p* Oſi CB wyciągniniymy prostopadłe do niey linie: PQ, pq; te przetną okrąg w M, i *m*, a liniią CD w L, i *l*; nakreślmy nadto, linie: MN, *mn*, LO, *lo*, równoodległe od oſi. Kwadrat promienia CM, ròwna ſię ſummie kwadratòw z PM, i CP; a że linia PQ równa ieſt promieniowi, (tak iako BD, CA i CB ſą równe) i CP równa PL; więc kwadrat z PQ, ròwna ſię ſummie kwadratòw z PM, i z PL.

Ze zaś Walce utworżone obrotem Proſtokątów Pq, PN, PO, maiących iednakie wyſokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy, albo iak kwadraty promięniòw tychże podſtaw; więc pierwſzy z tych Walcow będzie równy ſummie dwoch innych. Podobnym ſpoſobem okazać można, że Walec Pq równa ſię ſummie Walców utworzonych obrotem Proſtokątów P*m*, i P*l*.

Tako•

Takowe dowodzenie ma mieyſce chociaż nie od punktów P, i p, ale od którychkolwiek innych będą wywiedzione proſtopadłe do linii CD; a zatym podzieliwſzy, na takąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwſzy proſtopadłe przecinające tak okrąg iako i liniią CD; Summa wſzyſtkich Walców ſkładaiących Walec ADB, równać ſię będzie ſummie wſzyſtkich Walców wpiſanych w Półkulę, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców opiſanych na Oſtrokręgu, albo ſummie wſzyſtkich Walców opiſanych na Półkuli, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców w Oſtrokrąg wpiſanych. Aże ſumma wſzyſtkich Walców wpiſanych lub opiſanych na Półkuli, może ſię mnieyſzą ilością różnić od teyże Półkuli, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a więc i ſumma wſzyſtkich Walców wpiſanych, lub opiſanych Oſtrokręgowi, różnić ſię też od tego Oſtrokręgu będzie mnieyſzą ilością, niż ieſt ta ilość dana.

Więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania;) Walec utworzony obrotem kwadratu CABD równa ſię ſummie z Półkuli utworzoney obrotem czwartey części koła, i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tróykąta PCD.

Aże Oſtrokrąg utworzony obrotem Tróykąta BC, ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Połkula utworzona obrotem czwartey częśći koła AMBC, ieſt $\frac{2}{3}$ Walca.

A zatym kula, którąby utworzyła ſię obrotem Półkola, byłaby też $\frac{2}{3}$ Walca opiſanego na tey kuli, a utworzonego obrotem Proſtokąta opiſanego na Półkolu tworzącym kulę.

152. *Wnioſek* 1. Stoſunek bryłowatości kuli do bryłowatości Walca opiſanego, ten ſam ieſt co, i ſtoſunek powierzchni kuli, do powierzchni całey Walca opiſanego; (149).

153. *Wnioſek* 2. Bryłowatość kuli, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu, któryby miał za podſtawę, koło równe powierzchni kuli, a za wyſokość, promień teyże kuli. Jakoż ten Oſtrokrąg maiąc podſtawę cztery razy większą od podſtawy Walca na kuli opiſanego, byłby cztery razy większy od Oſtrokręgu innego równey z nim wyſokości, a maiącego podſtawę równą z Walcem. Aże ten drugi Oſtrokrąg, gdyby miał połowę tylko wyſokości Walca, byłby połową Oſtrokręgu maiącego równą z Walcem wyſo-

wyſokość i podſtawę, a zatym byłby połową tego Oſtrokręgu, który ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Oſtrokrąg maiący równą z Walcem podſtawę, a wyſokość równą promieniowi kuli, ieſt $\frac{1}{6}$ tego Walca; a zatym Oſtrokrąg maiący za wyſokość promień kuli, a podſtawę cztery razy więkſzą od podſtawy Walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ Walca. Ze zaś i kula ieſt $\frac{2}{3}$ tegoż Walca, więc kula równa ſię temu Oſtrokręgowi.

Można to ſamo ieſzcze i w ten ſpoſób okazać:

Niech będzie iakikolwiek *Wielościan* (Polyedrum) którego wſzyſtkie ściany dotykaią ſię kuli: uważaiąc każdą z tych ścian iak podſtawę Oſtrogranu maiącego ſwoy wierzchołek w środku Wielościanu; bryłowatość tego Wielościanu, równać ſię będzie bryłowatości iednego takiego Oſtrogranu, któryby miał za wyſokość promień kuli, a za podſtawę ſummę podſtaw, Oſtrogranów, na które podzielony był ten Wielościan; to ieſt powierzchnią całą tego Wielościanu.

To podanie zawſze ieſt prawdziwe, iakakolwiek będzie liczba ścian tego

Wielo-

Wielościann więc (podług tego, co ſię mówiło o ſpoſobie wyczerpania,) można by łatwo dowieść, że też i do kuli wſzczególności przyſtoſowane to podanie, ieſt prawdziwym, a zatym że kula, równa ſię Oſtrokręgowi, któryby miał za wyſokość, iey promień, a za podſtawę, całą iey powierzchnią.

154. *Wnioſek* 3. Wycinek kuli utworzoney obrotem wycinka kołowego BCM, równy ieſt Oſtrokręgowi maiącemu za wyſokość, promień tey kuli, a za podſtawę, koło, równe powierzchni ſkuliſtey, utworzoney obrotem łuku BM; to ieſt koło, którego promieniem byłaby cięciwa BM; a zatym bryłowatość tego wycinka, tak ſię ma do bryłowatości kuli, iak powierzchnia tego wycinka, do powierzchni kuli; albo iak wyſokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wnioſek* 4. Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonego obrotem wycinka koła BCM, ieſt $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta BPQD. Jakoż powierzchnia tego wycinka, tak ſię ma do powierzchni kuli, iak BP, do średnicy kuli albo iak Walec utworzony obrotem Proſtokąta BPQD do Walca opiſanego

go

go na kuli. Aże kula ieſt $\frac{2}{3}$ Walca na niey opiſanego, więc i wycinek kuli, utworzony obrotem wycinka koła BCM, ieſt też $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta BPQD.

156. *Wniosek* 5. Podobnie, i część kuli utworzona obrotem wycinka ACM ieſt $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta CAQP. Aże część kuli (którą to część nazwać można *klocem kuliſtym* (Truncus ſphaericus) utworzony obrotem części kołowey ACPM, ieſt ſummą z wycinka kuliſtego utworzonego obrotem wycinka kołowego ACM. i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tróykąta CPM; więc bryłowatość tego kloca kuliſtego, równa ſię ſummie z $\frac{2}{3}$ Walca teyże z nim wyſokości, któryby miał za podſtawę, koło wielkie kuli, i z $\frac{1}{3}$ Walca iednakiey także wyſokości, a którego podſtawa byłaby równa drugiemu kołu kloc ten kończącemu; a zatym bryłowatość tego kloca tak ſię ma do bryłowatości Walca utworzonego obrotem Proſtokąta CAQP, jak $\frac{2}{3}$ CA^2 + $\frac{1}{3}$ MP^2 do CA^2.

157. *Wniosek* 6. Aby znaleść odcinek kuli utworzony obrotem odcinka kołowego BMP; uważaymy ſobie ten odcinek

nek kulisty, iak różnicę między Półkulą utworzoną obrotem czwartey części kołowey ABC, a klocem kulistym utworzonym przez obrot odcinka CAMP; albo też iak różnicę wycinka kulistego utworzonego obrotem wycinka BDM; od Ostrokręgu utworzonego obrotem Trovkąta CPM; albo nakoniec, iak różnicę Wal a utworzonego obrotem Prostokąta BPQD, od Ostrokręgu ściętego, utworzonego obrotem Czworokąta BDLP.

ROZDZIAŁ X.

O Bryłach podobnych.

158. DWie Bryły samemi tylko płaszczystemi powierzchniami zakończone, i których wszystkie kąty bryłowe odpowiadaiące sobie mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadaiące są podobne; te mowię dwie Bryły nie różnią się chyba samą tylko wielkością, i iedna wzorem iest drugiey. Tak nap: dwa Sześciany, z których ieden ma bok długi na poł stopy, a drugi, na cal ieden, rożnią się samą tylko wielkością. Takie Bryły nazywaią się podobnemi.

Przy-

Przykłady. Dwa Równoległościany proſtokątne ſą podobne, gdy ich podſtawy i ściany ſą podobne iedne względem drugich.

Dwa Graniaſtoſłupy proſte, ſą podobne, gdy podobne ſą ich podſtawy, i gdy wyſokość ich proporcyonalna iednemu z boków, tychże podſtaw.

Dwa Oſtrograny, maiące kąt bryłowaty ſpolny w wierzchołku podobne będą, gdy podſtawy ich ſą równoodległe.

159. *Uwaga.* Gdy dwie Figury proſtokreślne, ſą podobne; wziąwſzy punkt iakikolwiek w iedney z tych figur, i poprowadziwſzy od tego punktu liniie do wſzyſtkich wierzchołków tey figury; można będzie znaleść i w drugiey figurze punkt podobnie pierwſzemu położony; od którego ciągnąc liniie do każdego tey figury wierzchołka, podzielemy ią na Tróykąty podobne względem Tróykątów, na które podzielona była pierwſza figura. Podobnie też:

160. *Twierdz:* 1. Wziąwſzy w Bryle zakończoney powierzchniami płaſzczyſtemi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tylu Oſtrogranów, ile ta Bryła ma ſcian, biorąc też ſciany za podſtawy; można znaleść i w drugiey Bryle podobney, punkt podobnie pierwſzemu położony, który wziąwſzy także za wierzchołek,

tyluż

tyluż co i w pierwſzey Bryle Oſtrogranów, wſzyſtkie te Oſtroſtrograny będą podobne względem Oſtrogranow pierwſzey Bryły.

Przykład. Weźmy środek Sześcianu za wierzchołek ſześciu Oſtrogranów, maiących za podſtawy, ściany tego Sześcianu; gdy w innym iakimkolwiek Sześcianie, weźmiemy także środek za wierzchołek ſześciu Oſtrogranów maiących za podſtawy, ściany tego drugiego Sześcianu; te drugie Oſtrograny, będą podobne względem pierwſzych.

Tożmówić i o innych Bryłach foremnych.

Natym podaniu zaſadza ſię cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłuſzczeniem iey niecò zabawić ſię.

Wybrawſzy iakikolwiek punkt w Bryle za wierzchołek Oſtrogranów maiących ściany tey Bryły, za podſtawy, i na te Oſtrograny, Bryłę podzieliwſzy, ſpuśćmy od tego punktu proſtopadłą do iedney z ścian tey Bryły; a na ścianie odpowiadaiącey w drugiey Bryle, weźmy punkt podobnie na tey ścianie położony, iaki ſpodek proſtopadłey ſpuſzczoney na ścianę pierwſzey

Bryły

Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiey Bryły położonego, wyprowadźmy proſtopadłą do tey ściany, tak wyſoką aby ſtoſunek iey do pierwſzey proſtopadłey równał ſię ſtoſunkowi dwóch krawędzi, odpowiadaiących ſobie w obydwóch Bryłach. Wierzch tey drugiey proſtopadłey weźmy za wierzchołek wſzyſtkich Oſtrogranów, na które, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Oſtrograny tey drugiey bryły, będą podobne względem Oſtrogranów, na które podzielona pierwſza Bryła.

Dowodz: Odległości dwóch punktów ſłużących za wierzchołki Oſtrogranów, od wierzchołków odpowiadaiących ſobie w ścianach, do których proſtopadłe ſą ciągnione, te mówię odległości, ſą przeciwproſtokątnemi Tróykątów proſtokątnych podobnych, maiących za boki te proſtopadłe, i odległości ich ſpodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wſzyſtkie ściany tych dwóch Oſtrogranów, odpowiadaiące ſobie boki, maią proporcyonalne, to ieſt maią ie w ſtoſunku dwóch krawędzi odpowiadaiących ſobie w dwóch Bryłach; a zatym wſzyſtkie te ściany, ſą podobne, i wſzyſtkie ich kąty ſą równe iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które ſię z nich ſkładaią, mogą przyſtać do ſiebie; ſą więc te

dwa

dwa Oſtrograny podobne. Pochyłości też ścian Oſtrogranòw do płaſzczyzn podſtaw ſą ròwne iedne względem drugich; ażeż także ròwne ſą pochyłości, tych podſtaw do płaſzczyzn ścian tych odpowiadaiących ſobie w Bryłach, ktòre ściany ſpolną krawędź maią z podſtawami tych Oſtrogranów, więc i ściany odpowiadaiące ſobie w tych dwoch Oſtrogranach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadaiących ſobie w dwoch Bryłach, a które maią ſpolną krawędź z pierwſzemi dwiema ścianami; to ieſt z podſtawami dwóch tych Oſtrogranòw,

Na ścianach dwòch, odpowiadaiących ſobie w tych dwóch pierwſzych Oſtrogranach, ſpuśćmy od ich wierzchołków proſtopadłe do podſtaw tychże dwòch ścian; a od ſpodków tych proſtopadłych poprowadźmy na ścianach odpowiadaiących ſobie w dwóch Bryłach, inne dwie proſtopadłe do tychże dwóch podſtaw, ścian Oſtrogranów. Oprócz tego, na płaſzczyznie przechodzącey przez dwie w obydwòch bryłach ciągnione proſtopadłe, ſpuśćmy do drugich dwóch proſtopadłych, na płaſzczyznach ścian odpowiadaiących ſobie, w Bryłach, od tychże co i pierwſze wierzchołkòw, trzecie dwie proſtopadłe; te oſtatnie proſtopadłe, będą proſtopadłemi do płaſzczyzn

dwoch

dwòch tych ścian odpowiadaiących sobie, na których ciągnione były dwie drugie prostopadłe; Tròykąty zawarte trzema temi prostopadłemi, tak w iedney, iak i w drugiey Bryle, będą ròwnokątne, a zatym i podobne. Aż pierwsze dwie prostopadłe ciągnione na płaszczyznach ścian, dwóch pierwszych Ostrogranòw, maiąsię do siebie, iak krawędzie odpowiadaiące sobie w dwòch Bryłach; więc też i odległości wierzchołkòw, tych dwòch Ostrogranòw od drugich dwóch ścian także sobie odpowiadaiących, w tych Bryłach, będą w tymże samym stosunku; i odległości spodków ich, od dwóch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadaiących sobie, w tymże też stosunku będą.

Spodki prostopadłych spuszczonych na dwie ściany odpowiadaiące sobie w pierwszych dwóch Ostrogranach, były podobnie położone na dwòch Brył krawędziach odpowiadaiących sobie, a zatym odległości tych spodków od końców odpowiadaiących sobie, tych krawędzi, są do siebie w tymże samym stosunku; a zatym odległości spodków liniy prostopadłych spuszczonych do płaszczyzn drugich dwóch ścian Brył, od końców tychże dwóch krawędzi, będą w tym samym stosunku. Więc na tych dwòch ścianach, spodki prostopadłych podobnie

ſą położone. Ze zaś i wielkości tych proſtopadłych ſą proporcyonalne krawędziom tych dwóch Brył; więc wierzchołki pierwſzych dwóch Oſtrogranów, ſą też podobnie położone względem dwóch ścian drugich, odpowiadaiących ſobie w Bryłach; a zatym i drugie dwa Oſtrograny maiące ſpolny wierzchołek, a te dwie ściany Brył za podſtawy, będą do ſiebie podobne.

Toż mówić i o innych Oſtrogranach odpowiadaiących ſobie, z których ſię te dwie Bryły ſkładaią. (i)

161. *Twierd.* 2. Powierzchnie Brył podobnych, zakończonych ſamemi tylko płaſzczyſtemi powierzchniami, maią ſię

(i) *To Twierdzenie, ieſt bardziey długie niż trudne, i łatwo poiąć ie można, maiąc Figurę przed oczema z drewna, lub z papieru zrobioną. Jużby też nawet po tak wielu Geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawnemi być Uczniowie, aby w myśli ſamey umieli ſobie wyſtawić Figurę pomagaiącą do zrozumienia Twierdzenia podanego: a zdatnieyſzą do obiaśnienia iego, niżby była Figura odryſowana w perſpektywie, i przed oczy im ſtawiona.*

ſie do ſiebie, iak kwadraty boków ich odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku dwumnożnym tychże boków.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany dwòch Brył podobnych, po dwie brane ſą ſobie podobne; i tak brane, w iednakowym do ſiebie ſą ſtoſunku, to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym, dwòch krawędzi odpowiadaiących ſobie; więc i ſumma wſzyſtkich ścian kończących iednę Bryłę, będzie do ſummy wſzyſtkich ścian kończących drugą Bryłę, w tymże ſamym ſtoſunku.

162. *Twierdz*: 3. Bryłowatości dwòch Brył podobnych, ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym dwòch ich krawędzi odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku troymnożnym tychże dwòch krawędzi.

1. Widzieliśmy iuż, że ſtoſunek iednego Sześcianu do drugiego, ten ſam ieſt, co i ſtoſunek boku pierwſzego Sześcianu, do czwartey linii ciągło proporcyonalney; którą ſię znayduie, ſzukaiąc nayprzod trzeciey ciągło proporcyonalney, do boku Sześcianu pierwſzego, i do boku Sześcianu drugiego; a potym do tychże dwòch boków, i do trzeciey propor-

porcyonalney znalezioney, ſzukaiąc czwartey.

Gdyby tedy bok drugiego Sześcianu był dwa razy nap: więkſzy od boku Sześcianu pierwſzego, ta czwarta ciągło proporcyonalna, byłaby ośm razy więkſza od boku Sześcianu pierwſzego, a zatym i Sześcian drugi byłby ośm razy więkſzy od Sześcianu pierwſzego.

2. Niech będą dwa Równoległościany proſtokątne podobne.

Gdy krawędź iedna, iednego z tych Równoległościanów, ieſt nap: dwa razy więkſza, od krawędzi iedney drugiego Równoległościanu; wſzyſtkie też inne krawędzie pierwſzego Równoległościanu, będą dwa razy więkſze od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podſtawy pierwſzego Równoległościanu, będzie cztery razy więkſza, niż powierzchnia podſtawy drugiego. Aże też i wyſokość pierwſzego, dwa razy ieſt więkſza od wyſokości drugiego; więc bryłowatość pierwſzego ieſt ośm razy większa od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przyſtoſować można do wſzyſtkich innych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogule,

W ogulności zaś mowiąc: niech będą trzy krawędzie: A,B,C, iednego Równoległościanu proſtokątnego; a zaś: *a*,*b*,*c*, krawędzie drugiego Równoległościanu, pierwſzemu podobnego; będą te trzy ſtoſunki równe; A : a = C : b = C : c. Liniiom A,i *a*, znaydźmy dwie nieL,i M, ciągło proporcyonalne; tak aby było A: a = a : L = L : M,

Będzie pierwſzy Równoległościan do drugiego, iak A do M.

Jakoż uważaiąc liniie A i *a*, B, i *b*, iak boki podſtaw, tych dwóch Równoległościanów, zamieńmy Proſtokąt z linii a, i b, na inny, któryby miał za bok ieden, liniią B, a za bok drugi, tę liniią, która wypadnie z proporcyi B : b = a : *x*. Ze zaś ſtoſunek linii B do b, wzięty ieſt za równy ſtoſunkowi linii A do *a*, więc też będzie A : a = a : x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey ſzukamy, będzie w ſamey rzeczy trzecią proporcyonalną do A, i *a*. Nazwiymy tę trzecią proporcyonaln.. ; L. Będzie podſtawa drugiego Równoległościanu, równa Proſtokątowi z B przez L; i ten drugi Równoległościan, będzie równy Równoległościanowi, któryby miał trzy linie B, *c*, L, za krawędzie ; a zatym ſtoſunek iego do

P pier-

pierwſzego Równoległościanu, będzie teh ſam, co i ſtoſunek Proſtokąta z liniy c, i L, do Proſtokąta z liniy A, i C.

Zamieńmy Proſtokąt z liniy c i L, na inny, któryby miał za bok ieden liniią C, a za bok drugi liniią, która wypadnie z proporcyi. C : c = L : x. Ze zaś ſtoſunek linii C do c. wzięty ieſt za równy ſtoſunkowi A do a, a ſtoſunek A do a, zrobiliśmy równy ſtoſunkowi a, do L, więc też będzie a : L = L : = x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey ſzukamy będzie w ſamey rzeczy trzecią proporcyonalną do a, i L. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną : M; Proſtokąty : C × M i c × L. będą równe. Aże ſię do wiodło iż pierwſzy Równoległościan ieſt do drugiego w ſtoſunku Proſtokąta A × C do Proſtokąta c × L; więc też ten pierwſzy Równoległościan będzie do drugiego w ſtoſunku Proſtokąta A × C do Proſtokąta C × M, to ieſt w ſtoſunku A do M.

Ze zaś ieſt A : a = a : L = L : M; więc ſtoſunek pierwſzego Równoległościanu do drugiego, równa ſię ſtoſunkowi linii pierwſzey do czwartey, ciągło proporcyonalney; która to pierwſza linija ſłużą-

służąca za pierwszy wyraz proporcyi, powinna być krawędziem iednego z tych Równoległościanów, drugim zaś teyże proporcyi wyrazem, ma być krawędź drugiego Równoległościanu, pierwszemu odpowiadaiący; tak iak iest nap: krawędź A, i *a*.

Ale że też i dwa Sześciany maiące krawędzie A, i *a*, w tymże samym byłyby stosunku, więc dwa Równoległościany podobne, maią się do siebie w stosunku sześciennym ich krawędzi.

163. *Twierdz: przybrane.* Wysokości Graniastosłupów podobnych, lub Ostrogranów podobnych, tak się maią do siebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące sobie.

Dowodz: Dwóch ścian odpowiadaiących sobie w dwóch Graniastosłupach podobnych, pochyłości do podstawy są równe; tychże ścian wysokości, tak się maią do siebie, iak boki, służące im za podstawy. Wysokości tych Graniastosłupów, równe są prostopadłym, spuszczonym na ich podstawy od punktów którychkolwiek na podstawach przeciwnych, nap: od punktów na bokach odpowiadaiących sobie w tychże pod-

ſtawach; a zatym te wyſokości Graniaſtoſłupów, będą ſłużyć za iedno ramie kąta proſtego, w dwóch Tróykątach podobnych, które za przeciwproſtokątne, maią wyſokości dwóch ścian odpowiadaiących ſobie. Będą zatym te wyſokości dwóch Graniaſtoſłupów, tak ſię mieć do ſiebie, iak wyſokości dwóch ich ścian odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak krawędzie dwóch tychże Graniaſtoſłupów, odpowiadaiące ſobie. To ſamo rozumowanie przyſtoſować można i do Oſtrogranów,

3. Niech będą dwa iakiekolwiek Graniaſtoſłupy podobne, i te także ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym, ich krawędzi odpowiadaiących ſobie.

Rozumowanie Arytmetyczne, któreby mogło ſłużyć za wſtęp do ogulnego dowodzenia, to ſamo ieſt, co i poprzedzadzaiące.

Wyſtawuiąc ſobie podſtawy tych dwóch Graniaſtoſłupów, zamienione na dwa kwadraty równe im co do powierzchni; ponieważ powierzchnie tych dwóch podſtaw, maią ſię do ſiebie, iak kwadraty boków ich, odpowiadaiących ſobie; więc

też

też i powierzchnie kwadratów równych tym podstawom; mieć się do siebie będą, iak kwadraty boków odpowiadaiących sobie, w tychże podstawach; a zatym i stosunek boków tych dwóch kwadratów; równy będzie stosunkowi boków odpowiadaiących sobie w podstawach, dwóch Graniastosłupów. Aże ten ostatni stosunek, równa się stosunkowi wysokości dwóch Graniastosłupów; więc Rownoległościany maiące za podstawy kwadraty, równe podstawom Graniastosłupów, i wysokości równe wysokościom Graniastosłupów, byłyby do siebie podobne; a zatym te dwa Równoległościany, takby się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi, albo iak Sześciany krawędzi odpowiadaiących sobie w Graniastosłupach. Ze zaś te Równoległościany, byłyby równe względem Graniastosłupów, więc też i dwa Graniastosłupy podobne, maią się do siebie, iak Sześciany krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

4. Niech będą dwa iakiekolwiek Ostrograny podobne, stosunek ich równa się stosunkowi Sześcianów krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

Dwa

Dwa Graniastosłupy nap: proste, których podstawy i wysokości byłyby równe względem podstawy i wysokości, tych Ostrogranów; te mówię Graniastosłupy miałyby wysokości proporcyonalne bokom podstaw swoich; byłyby więc podobne; a zatym tak by się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi. Aże byłyby trzy razy większe względem tych dwóch Ostrogranów, więc i te Ostrograny są do siebie w stosunku Sześciennym ich krawędzi.

5. Wszystkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaskiemi, maią się do siebie iak Sześciany, ich krawędzi.

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Ostrograny, z których każdy, w szczegulności należący do iedney Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey Bryły. Te Ostrograny iednе względem drugich poiedynczo brane, mieć się do siebie będą w stosunku sześciennym ich krawędzi, odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich Ostrogranów, z których się składa iedna Bryła, będzie do summy wszystkich Ostrogranów; z których się składa druga

ga Bryła, w tymże samym stosunku, to iest w stosunku sześciennym, ich krawędzi, odpowiadaiących sobie.

164. *Defin:* Walce proste podobne do siebie są te, których stosunek wysokości, równa się stosunkowi promieni, ich podstaw; przecięcia zatym tych Walców przez osi przechodzące, są podobne, a ztąd podobne są i Prostokąty tworzące obrotem swoim te Walce.

Co zaś do Walców pochyłych, a do siebie podobnych; oprocz tego, że wysokości ich mieć się powinny do siebie, iak promienie ich podstaw, przecięcia też ich od płaszczyzny przechodzącey przez ich osi prostopadle do podstawy, powinny być do siebie podobne, to iest ich osi powinny się mieć do siebie, iak promienie ich podstaw:

165. *Twierdz.* 4. Powierzchnie Walców prostych podobnych, maią się do siebie, iak kwadraty ich *Wymiarów* (Dimensio) odpowiadaiących sobie; to iest: iak kwadraty promieni, ich podstaw, albo iak kwadraty ich wysokości.

Powierzchnia każdego z tych Walców równa się Prostokątowi z okręgu podstawy

wy iego, i z summy wysokości iego, i promienia podstawy; więc powierzchnie te, tak się mieć do siebie będą, iak Prostokąty z promieni ich podstaw, i z summy tychże promieni i wysokości Walców. Aże Promienie podstaw, są do siebie (dla podobieństwa Walców) iak ich wysokości, więc i summa z tych promieni iest do summy z tych wysokości, w tym stosunku, w którym są te promienie. Prostokąty więc, w których stosunku maią się do siebie powierzchnie te Walców, są podobne, a przeto tak się będą do siebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadaiących sobie, nap: iak kwadraty promieni ich podstaw. Będą więc do siebie i powierzchnie Walców w tymże samym stosunku; to iest, iak kwadraty promieni, ich podstaw.

Toż mówić i o powierzchniach krzywych w Walcach; to iest, o takich, w których się nie zamykaią podstawy.

166. *Twierdz:* 5. Bryłowatości Walców podobnych, tak się maią do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie; to iest, są do siebie w stosunku troymnożnym tychże wymiarów, nap: w stosunku troymnożnym promieni, ich podstaw.

Dowodz:

Dowodz: Opiſzmy na podſtawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty foremne, podobne; niech te Wielokąty będą podſtawami Graniaſtosłupów, teyże z Walcami wyſokości. Te Graniaſtosłupy będą podobne, a zatym będą ſię miały do ſiebie w ſtoſunku tròymnóżnym, nap: promieni ich podſtaw.

Walce tak ſię do ſiebie maią, iak Graniaſtoſłupy na nich opiſane. Jakoż każdy Walec ieſt do Graniaſtosłupa na nim opiſanego, w ſtoſunku podſtawy tego Walca do podſtawy Graniaſtoſłupa. Aże podobne ſą dwa Wielokąty na podſtawach Walców opiſane, więc tenże ſam ſtoſunek będzie każdego Walca do Graniaſtosłupa na nim opiſanego; a zatym tak ſię mieć będzie ieden Walec, do Graniaſtoſłupa na nim opiſanego, iak i Walec drugi do Graniaſtosłupa na nim także opiſanego, tak więc pierwſzy Walec będzie ſię miał do drugiego, iak i pierwſzy Graniaſtosłup do drugiego.

Aże ſtoſunek tych Graniaſtosłupów równa ſię ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni podſtaw Walców, na których ſą te Graniaſtosłupy opiſane; więc i ſtoſunek

ſunek tych Walców równać ſię także będzie ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni tychże podſtaw.

167. Można obiaśnić przykładami liczebnemi to Twierdzenie; ma zaś być nayprzod przyſtoſowane do ſamych Walców proſtych, zkąd łatwo wnieść będzie można, że i w ukośnych Walcach, ten ſam ſtoſunek ma mieyſce; ponieważ Walce ukośne, równey podſtawy i wyſ kości z Walcami proſtemi, byłyby im równe, a zatym byłyby też do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni podſtaw ſwoich.

168. *Defin.* Oſtrokręgi proſte nazywaią ſię *podobnemi*, gdy tak ſię maią do ſiebie ich wyſokości, iak i promienie ich podſtaw. Przecięcia przechodzące przez oś tych Oſtrokręgów ſą podobne, a zatym podobne ſą Tróykąty, tworzące obrotem ſwoim te Oſtrokręgi.

Co zaś do Oſtrokręgów ukośnych: tych nie tylko wyſokości tak ſię mieć do ſiebie powinny, iak promienie ich podſtaw, ale nadto i oſi ich w tymże ſamym do ſiebie ſą ſtoſunku.

169. *Twierdz:* 6. Powierzchnie całe Ostrokręgow prostych, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stosunku dwumnożnym boków tychże Ostrokręgów.

Dowodzenie tego, może być podobne do dowodzenia Twierdzenia 4. względem stosunku powierzchni Walców podobnych.

Może też być i w sposob następuiący, który także służyćby mogł równie i do Walców:

W iednym którymkolwiek Ostrokręgu, powierzchnia krzywa, tak się ma do powierzchni podstawy, iak bok Ostrokręgu, do premienia tey podstawy. Aże i w drugim Ostrokręgu podobnym, pierwszemu tenże sam stosunek ma mieysce; więc powierzchnia krzywa iednego Ostrokręgu, tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak powierzchnia krzywa drugiego Ostrokręgu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywey i z powierzchni podstawy iednego Ostrokręgu, to iest cała iego powierzchnia tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchnia drugiego Ostrokręgu, do powierzchni

iego

iego podſtawy; a zatym cała powierzchnia pierwſzego Oſtrokręgu, tak ſię ma do całey powierzchni drugiego, iak powierzchnia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, do powierzchni drugiego; albo iak Kwadrat promienia pierwſzey podſtawy, do kwadratu promienia drugiey.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywe Oſtrokręgów podobnych, ſą w ſtoſunku dwumnożnym promieni podſtaw, tych Oſtrogręgów lub ich boków odpowiadaiących ſobie.

170. *Twierdz*, 7. Bryłowatości Oſtrokręgów podobnych, maią ſię do ſiebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak Sześciany promieni ich podſtaw, albo iak Sześciany ich boków; i t. d.

Twierdzenie to podobnie ſię dowodzi, iak i poprzedzaiące, względem bryłowatości Walców; kładąc zamiaſt Graniaſtoſłupów na Walcach opiſanych, Oſtrograny opiſane na Oſtrokręgach.

171. *Uwaga.* Wſzyſtko to, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku bryłowatości

Równo-

Równoległościanów, Graniastosłupow, Ostrogranów, i Ostrokręgów podobnych, na to wypada, że:

W ogulności mówiąc, te Bryły są w stosunku złożonym z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości.

Ze zaś, gdy te Bryły są podobne, stosunek ich podstaw, iest dwumnożnym stosunku ich wysokości, więc stosunek złożony z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości, składa się z stosunku dwumnożnego, i z stosunku poiedyńczego ich wysokości; będzie tedy taki stosunek tróymnożnym stosunku ich wysokości. Aże stosunek ich wysokości równa się stosunkowi ich boków którychkolwiek odpowiadaiących sobie, więc stosunek tych Brył, gdy do siebie są podobne, iest też stosunkiem tróymnożnym boków ich którychkolwiek odpowiadaiących sobie.

172. *Twierdz.* 8. Powierzchnie kul, są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, to iest: iak kwadraty ich promieni. Bryłowatości zaś kul, są do siebie w stosunku tròymnożnym ich promieni, to iest, iak Sześciany tychże promieni.

Dowodz.

Dowodz. Powierzchnie kul, ſą cztery razy większe, niżeli powierzchnie ich kół wielkich; a zatym, tak ſię do ſiebie maią, iak powierzchnie tychże kół, to ieſt: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowatości kul, ſą ⅔ względem Walców na nich opiſanych; więc tak ſię maią do ſiebie, iak bryłowatości tych Walców, to ieſt iak Sześciany ich promieni.

173. *Uwaga.* Widzieliśmy w ſzczegulności, iż powierzchnia kuli, ieſt do powierzchni kwadratu iey średnicy, w ſtoſunku okręgu koła do iego średnicy, i ten ſtoſunek ieſt zawſze iednakowy. Widzieliśmy też, że bryłowatość kuli, ieſt do bryłowatości Sześcianu iey średnicy, iak okrąg koła, do średnicy iego, 6 razy wziętey; który także ſtoſunek nigdy ſię nieodmienia.

Kule więc zachowuią własności Brył podobnych, tak w ſtoſunku ich powierzchni, iako i w ſtoſunku ich bryłowatości. Jakoż, ſą one w ſamey rzeczy Bryłami podobnemi; środek iedney kuli podobnie ieſt położony, iak i środek inney iakieykolwiek kuli; tak iedna iak i druga, tworzy ſię obrotem połkola, a te pòlkola ſą do ſiebie podobne.

Można-

Możnaby więc (z niewielką odmianą) to im przyſtoſować, co ſię powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaſkiemi, względem pùnktów podobnie położonych w tychże Bryłach.

174. *Defin:* Wycinki podobne kul, ſą te, których kąty w środku, ſą podobne, albo które obrotem podobnych wycinków kół tworzą ſię.

Odcinki kul, podobne, ſą te, których promienie podſtaw, tak ſię do ſiebie maią, jak ich wyſokości, albo iak promienie kul, do których należą; albo na koniec ſą te, które ſię tworzą podobnych pol odcinków kol obrotem.

175. *Twierdz:* 9. Powierzchnie kuliſte, i powierzchnie całe, tak wycinków, jak i odcinków podobnych w kulach, ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz: Niech będą: ACB, aeb, dwa wycinki, kół podobne, które obrotem ſwoim, około promieni: AC, ac, tworzą podobne kul wycinki. *Tab. VI Fig. 4.*

Nayprzod

Nayprzod Powierzchnie kuliste utworzone przez łuki: AB: ab, rownać ſię będą powierzchniom kòł maiących za promienie, liniie: AB, ab; więc tak ſię mieć będą do ſiebie, iak kwadraty tych liniy: AB, ab, albo iak kwadraty promieni: AC, ac.

Powtore. Powierzchnie Oſtrokręgowe utworzone obrotem promieni: CB, bc, maią ſię też do ſiebie, iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca; Więc i powierzchnie całe wycinków podobnych tak ſię do ſiebie maią, iak kwadraty promieni CA, ca.

Koła wykreślone promieniami BD, bd, i ſłużące za podſtawy odcinkom kul, utworzonym przez obrot połodcinków kòł; ABD, abd, ſą także do ſiebie, iak kwadraty liniy BD, bd. a zatym iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca.

176. *Twierdz:* 10. Bryłowatości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, ſą do ſiebie w ſtoſunku tròymnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz. Nayprzod: Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB, koła

tak

tak ſię ma do ſwoiey kuli, iak kwadrat linii AB, do kwadratu średnicy AE, albo iak kwadrat linii ab, do kwadratu średnicy ae; to ieſt: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek: acb, koła, do kuli ſwoiey. Więc tenże ſam ieſt ſtoſunek iednego z tych wycinka do ſwoiey kuli, co i drugiego wycinka do ſwoiey także kuli; ażatym te wycinki, tak ſię do ſiebie maią, iak i kule do ktòrych należą. Aże ſtoſunek tych kul, ieſt ſtoſunkiem tròymnożnym ich promieni, więc i ſtoſunek tych wycinków ieſt także ſtoſunkiem tròymnożnym tychże promieni.

Powtore. Oſtrokręgi podobne utworzone obrotem Tròykątòw, CBD, cbd, ſą do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni CB, cb; więc tak też maią ſię do ſiebie, iak i wycinki kul utworzone obrotem wycinkòw ACB, acb, do kòł należących; a zatym i ròżnice każdego wycinka kuli, od każdego Oſtrokręgu, to ieſt odcinki kul, utworzone przez pòłodcinki kòł, ABD, abd, ſą do ſiebie w ſtoſunku ròwnym ſtoſunkowi wycinków kul, to ieſt w ſtoſunku tròymnożnym promieni: CB, cb.

177. *Twierdz:* 11. Gdy cztery iakie linie czynią proporcyą, i gdy dwa pierwſze wyrazy tey proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącemi ſobie, czyli podobnie położonemi, w dwóch Bryłach podobnych; a dwa oſtatnie wyrazy teyże proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącemi ſobie, w dwòch innych Bryłach podobnych; ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, będzie ròwny ſtoſunkowi dwòch brył drugich.

Dowodz. Gdyby te cztery liniie były bokami czterech Sześcianów, te cztery Sześciany czyniłyby proporcyą; aże ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwóch pierwſzych Sześcianòw, a ſtoſunek dwòh drugich Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwòch drugich Sześcianów; więc i ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, ròwna ſię ſtoſunkowi dwòch Brył drugich.

178. *Uwaga.* Bryłowatości Brył podobnych, prędzey roſną, niż ich powierzchnie.

Przykład. Niech będą liniie odpowiadaiące ſobie w dwòch Bryłach podobnych, dwa razy większe iedne wzglę-

dem

dem drugich; powierzchnia iedney ztych Bryły, będzie cztery razy większa od powierzchni drugiey Bryły; a zaś Bryłowatość iedney Bryły, będzie ośm razy większa od bryłowatości, drugiey Bryły.

W ogulności zaś mówiąc, niech będą AB, AC, liniiami odpowiadaiącemi sobie, w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy Tròykąt prostokątny maiący liniią AB, za iedno ramie kąta prostego, a liniią AC, za przeciwprostkątną. Tab. VI. fig. 5.

Pociągniymy CD prostopadłą do AC, i natrafiaiącą na liniią AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą do AD, i natrafiaiącą na liniią AC przedłużoną w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Brył, któreby miały AB, i AC za liniie odpowiadaiące sobie, maią się tak do siebie, iak liniie AB, i AD; a bryłowatości ich, są w tym samym stosunku, w ktòrym liniie AB, i AE.

Aże liniia AE, większa iest względem linii AB, niżeli liniia AD; więc też i bry-

łowatość drugiey Bryły większa iest względem bryłowatości pierwszey Bryły, niżeli powierzchnia tey drugiey Bryły, względem powierzchni pierwszey Bryły; to iest: bryłowatość drugiey Bryły prędzey się powiększa, niżeli iey powierzchnia.

179. *Uwaga.* Na poprzedzaiących Twierdzeniach zasadza się podział *Linii Brył* (Linea Solidorum) który znayduiemy na cerklu proporcyonalnym.

Ta liniia zawiera w sobie zwyczaynie 64. podziałów, które się rachować zaczynaią od *środka* narzędzia (à centro).

Odległości tego środka od punktów naznaczonych liczbami: 1. 8, 27, 64, tak się maią do siebie, iak

liczby - - - - 1, 2, 3, 4; co znaczy, że Bryły podobne, których boki są w stosunku liczb: 1, 2, 3, 4, maią bryłowatości w stosunku liczb: 1, 8, 27, 64.

Jnne podziały wyznaczone są przez wyciągnienie przybliżone pierwiastków sześciennych. J tak, ponieważ boki dwòch

dwòch Sześcianòw, z ktòrych ieden dwa razy ieſt więkſzy od drugiego, tak ſię bliſko maią do ſiebie,iak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na tey linii liczbami: 1, 2, tak ſię maią do ſiebie, iak liczby: 100, i 126. Używanie dwòch takich liniy, znayduiących ſię na dwoch ramionach cerkla proporcyonalnego, podobne ieſt używaniu innych liniy tamże ſię znayduiących, ktòre w oſobnym na to Rozdziale iuż ſię wyłożyło. w Części I.

K O N I E C.




CRACOVIENSIS

Tab. I.

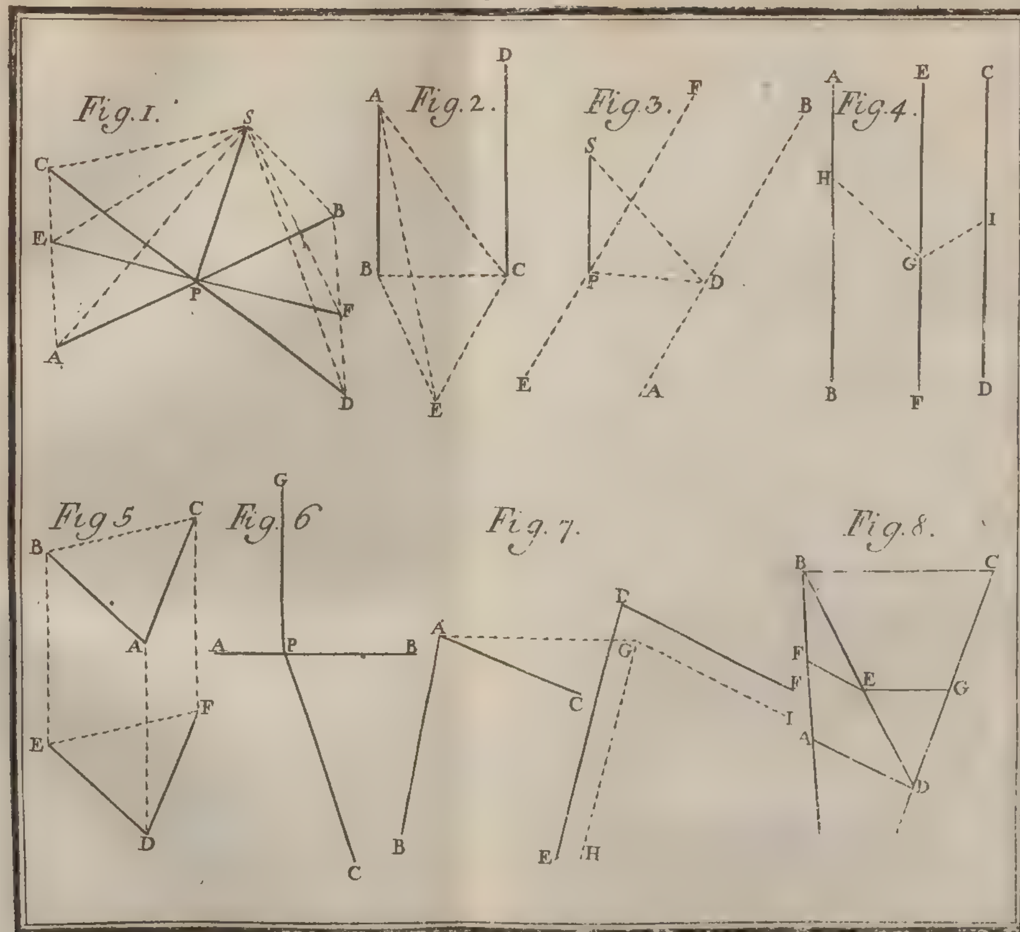


Fig. 1.
S
C
B
E
P
F
A
D
Fig. 2.
D
A
B
C
E
Fig. 3.
F
B
S
P
D
E
A
Fig. 4.
A
E
C
H
I
G
B
F
D
Fig 5
C
B
A
F
E
D
Fig. 6
G
A
P
B
C
Fig. 7.
D
A
G
F
C
I
B
E
H
Fig. 8.
B
C
F
E
G
A
D

Tab. II.

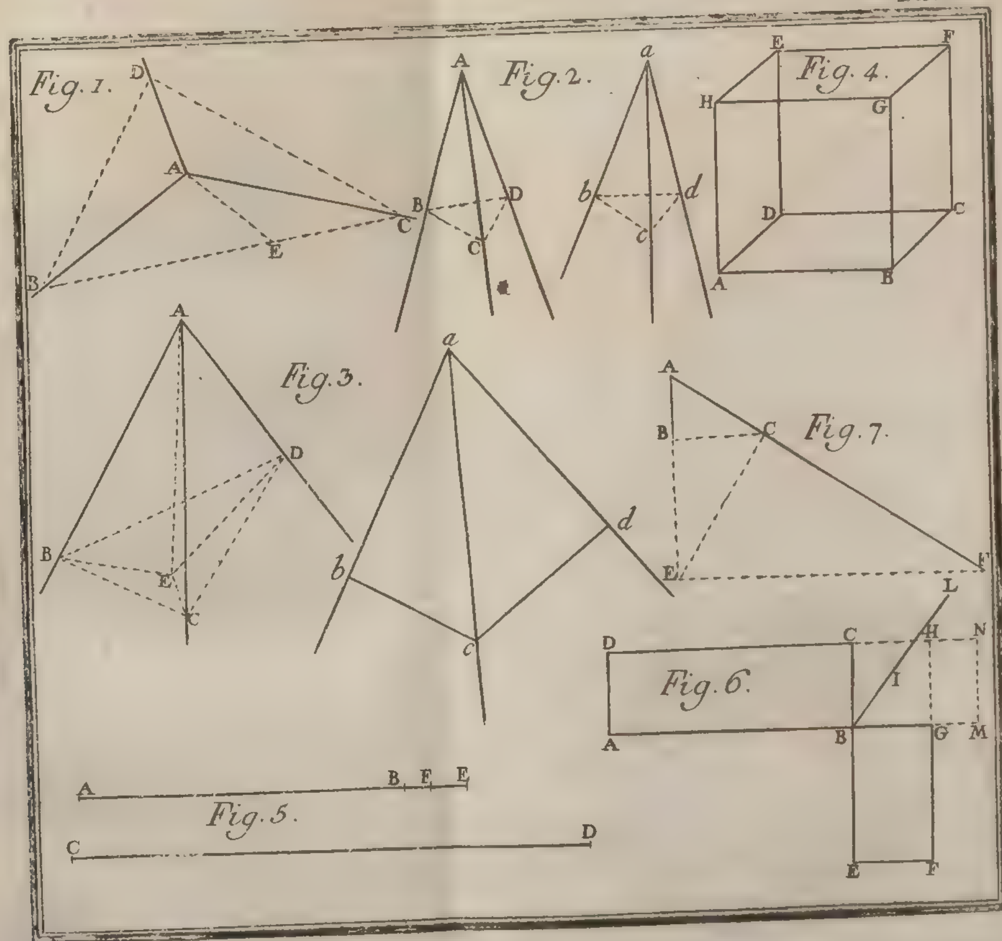
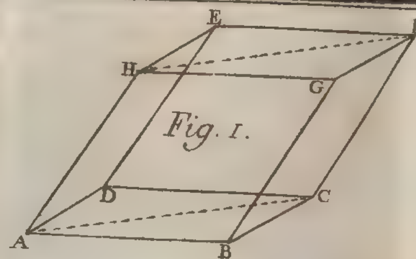
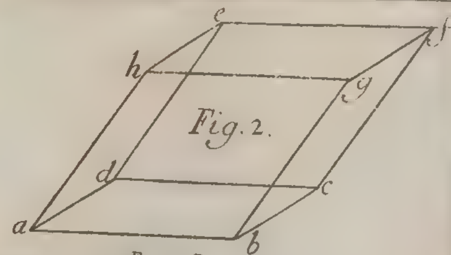


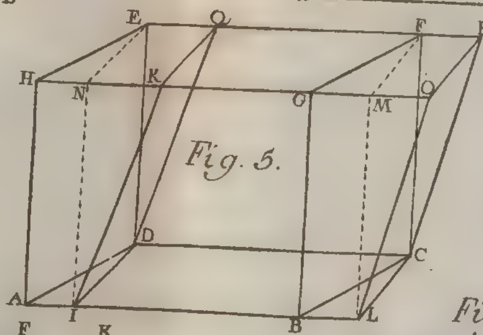
Fig. 1.
D
A
B
E
C
Fig. 2.
A
B
D
C
a
b
d
c
Fig. 4.
E
F
H
G
D
C
A
B
Fig. 3.
A
D
B
E
C
a
d
b
c
Fig. 7.
A
B
C
E
F
L
D
C
H
N
Fig. 6.
I
A
B
G
M
E
F
Fig. 5.
A
B
F
E
C
D

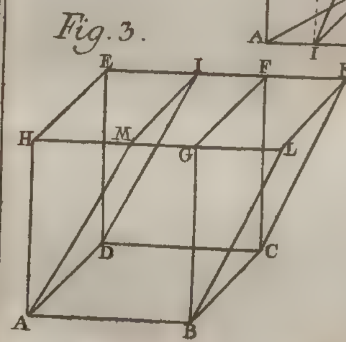


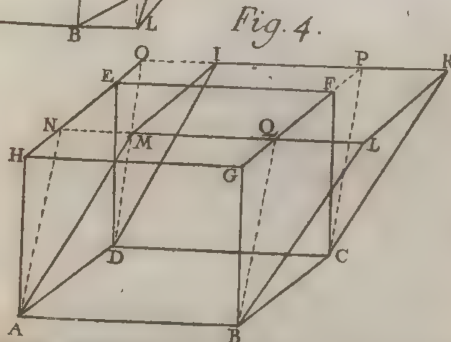
Tab III


E
F
H
G
Fig. 1.
D
C
A
B


e
f
h
g
Fig. 2.
d
c
a
b

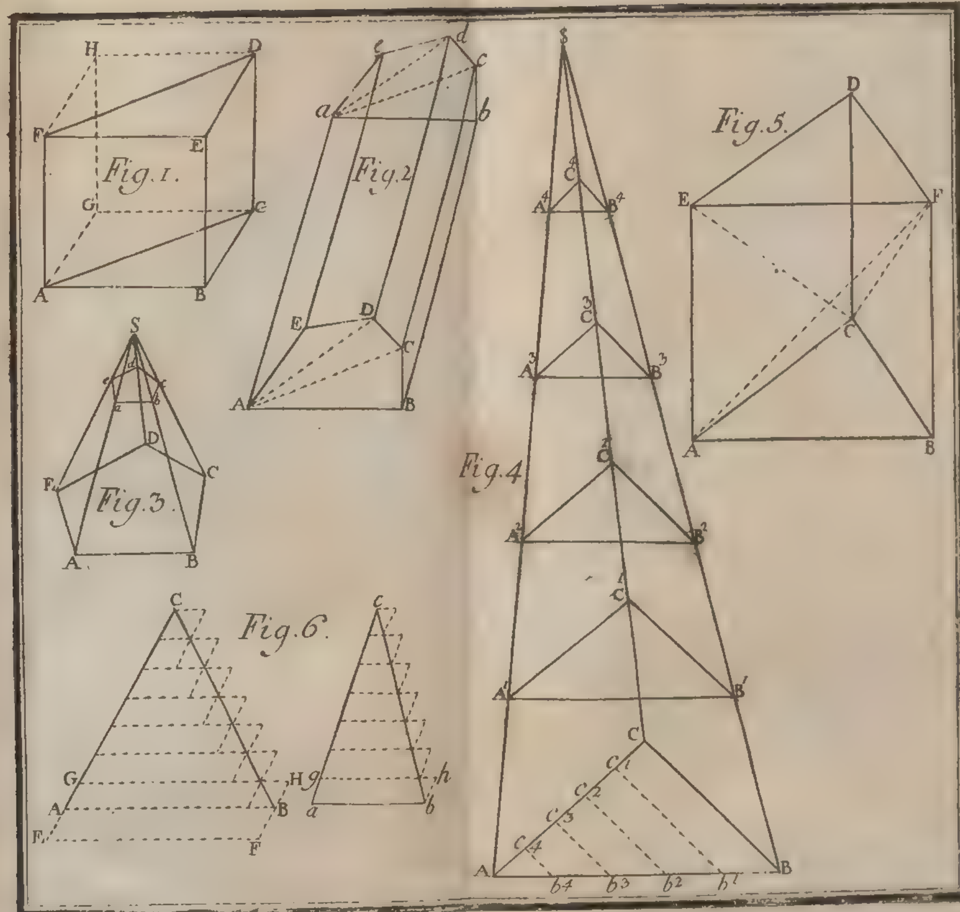

E
Q
F
P
H
N
K
G
M
O
Fig. 5.
D
C
A
I
B
L


Fig. 3.
E
I
F
K
H
M
G
L
D
C
A
B

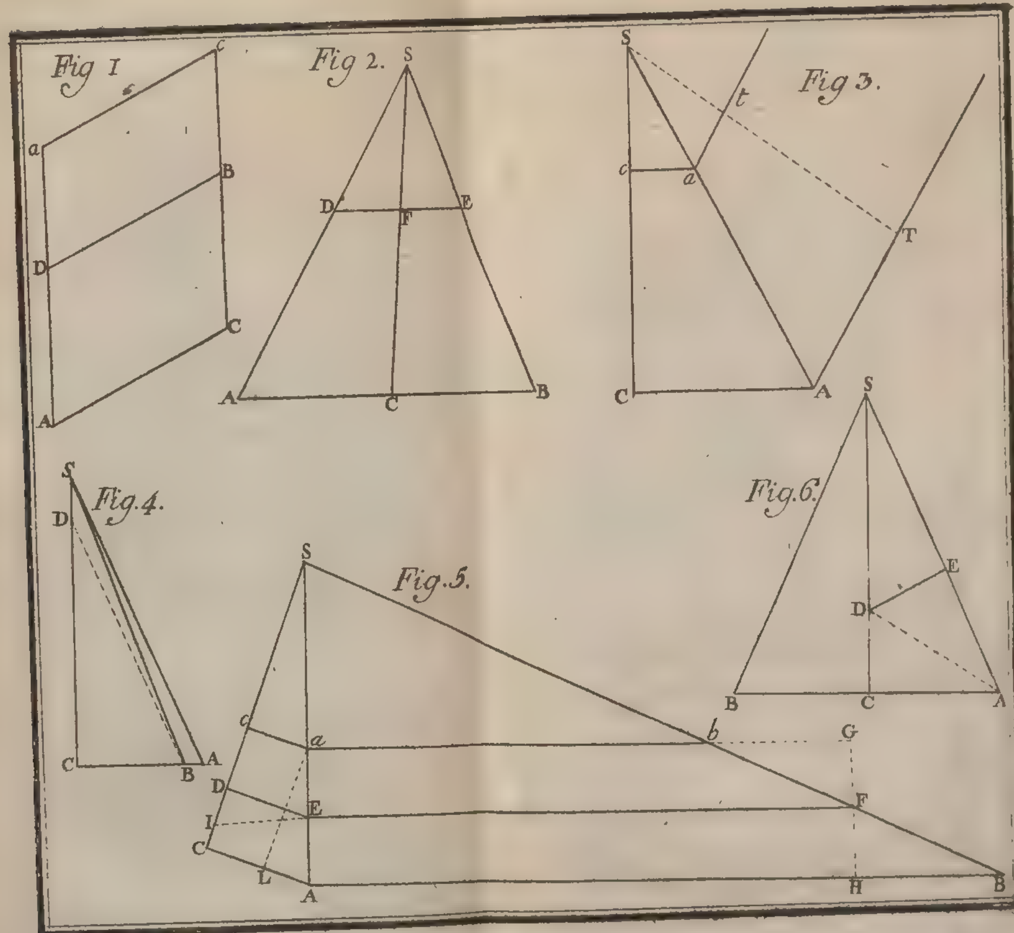

Fig. 4.
O
I
P
K
E
F
N
M
Q
L
H
G
D
C
A
B


VNIV.
CRACOVIENSIS

Tab IV.



Tab. V.



Tab. VI.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

[illegible] dząc o nim bez [illegible] niania y dobrze ſens iego tłumacząc.

Jeżeli każdy (prawi) *człowiek w partykularności może wolność ſwą alienować, y poddać ſię* (należało położyć raczey *oddać ſię*) *w niewolnictwo Panu to ieſt*, in Dominium proprietatis. *Za cożby Narod cały nie mogł także ſwą wolność oddać*, (raczey *poddać* ſub Dominium Jurisdictionis) *y uczynić ſię poddanym* Królowi: jakby mowił: cięższa to rzecz bez porownania człowiekowi w partykularności oddać ſię w niewolą, y zoſtać własnością cudzą, niż całemu Narodowi poddać ſię pod rząd y Juryzdykcyą Króla. Jeżli bywa tam to prawnie: czemuż nie to? lecz Autor bez dyſtynkcyi między własnością y Juryzdykcyą rowno waży wolności, więc ią może alienować przy[illegible] naymniey w niedoſtatku innego ſpoſobu do życia, ktore droższe ieſt, iak wolność.

Rzeczeſz, iż *niewola ieſt przeciwna naturze ludzkiey.* Coż przez to rozumie ſię? Nie to: iakoby niewola ſprzeciwiła ſię prawu naturalnemu czyli światłu rozumu, ale tylko to: iż ſprzeciwi ſię temu ſtanowi w ktorym człowiek ſtworzony wolnym, y Panem wolności ſwoiey: tego ſtanu uſtępuie, gdy ſię w niewolą zaprzedaie, co mu wolno, iako wolno Panu rzecz ſwoię alienować. Chciawſzy dowieść, że człowiek nie może alienować wolności, należało wprzod dowieść, że nie ieſt Panem oney.

)(5

